

成都地铁7号线轨道不平顺谱特征分析*

陈 辉 万 壮

(成都地铁运营有限公司, 610081, 成都//第一作者, 正高级工程师)

摘 要 目的: 为了对列车运行的平稳性、安全性、舒适性以及环境振动噪声进行更好的控制, 亟需展开针对成都地铁线路进行轨道不平顺谱的分析研究。方法: 采用轨检车对成都地铁7号线轨道弹性变形和永久变形的叠加状态进行动态检测, 测试项目主要包括左右轨的高低不平顺、轨向不平顺、水平不平顺及轨距不平顺等。然后采用目前最常用的功率谱密度估计方法——Welch法(改进的周期图法)进行功率谱密度计算, 得到统计期内被测轨道的长波高低不平顺谱、轨向不平顺谱、轨距不平顺谱及水平不平顺谱, 并对计算结果进行分析, 总结出成都地铁7号线轨道不平顺谱的频率特性, 并与国内外典型轨道谱进行对比。基于非线性最小二乘法, 采用中国三大干线谱公式对成都地铁7号线轨道谱进行曲线拟合。结果及结论: 轨道板板缝会影响轨道的长波不平顺; 成都地铁7号线轨道不平顺谱均存在空间频率为 0.04 m^{-1} 整数倍的窄带谱峰, 该空间频率与无缝钢轨相邻2个焊缝间的线路长度吻合, 焊缝不平顺已经成为了严重影响轨道状态以及列车运行的问题; 成都地铁7号线轨道的平顺性优于美国、德国以及我国的普速铁路(尤其是波长大于 19 m 的长波频段), 但不如我国的高速铁路无砟轨道; 中国三大干线谱更适用于成都地铁7号线。

关键词 地铁线路; 轨道平顺性; 轨道不平顺谱; 轨道谱曲线拟合

中图分类号 U213.2⁺13

DOI:10.16037/j.1007-869x.2023.07.001

Characteristic Analysis of Chengdu Metro Line 7 Track Irregularity Spectrum

CHEN Hui, WAN Zhuang

Abstract Objective: To better control the stability, safety, comfort, environmental vibration and noise of train operation, it is necessary to conduct analysis and research on track irregularity spectrum specifically for Chengdu Metro lines. Method: Dynamic tests are performed using a track inspection vehicle to detect the superposed state of elastic deformation and permanent deformation of Chengdu Metro Line 7 tracks. The test items mainly include vertical irregularity, lateral irregularity,

horizontal irregularity, and gauge irregularity of both left and right rails. The widely used power spectral density estimation method – Welch method (improved periodogram method) is employed to calculate the power spectral densities of long-wave vertical irregularity, lateral irregularity, gauge irregularity, and horizontal irregularity of the tested tracks within the statistical period. The frequency characteristics of the track irregularity spectrum of Chengdu Metro Line 7 are summarized and compared with the typical track spectrums in China and abroad. Based on the nonlinear least squares method, the curve fitting of the track spectrum of Chengdu Metro Line 7 is carried out using the three main line spectrum formulas of China. Result & Conclusion: The track joint gaps affect the long-wave irregularity of the track; the track irregularity spectrum of Chengdu Metro Line 7 exhibits narrowed peaks at spatial frequencies that are integer multiples of 0.04 m^{-1} ; this spatial frequency corresponds to the length between two adjacent welds on continuous welded rails, indicating that the weld irregularities become a significant issue affecting the track condition and train operation; the track smoothness of Chengdu Metro Line 7 is better than that of the common speed railways in the United States, Germany and China (especially in the long-wave frequency range with wavelengths greater than 19 m), but not as good as that of the high-speed railway ballastless track in China; the three main line spectrum formulas of China are more suitable for Chengdu Metro Line 7.

Key words metro line; track irregularity spectrum; track smoothness; curve fitting of track spectrum

Author's address Chengdu Metro Operation Co., Ltd., 610081, Chengdu, China

轨道不平顺是轨道交通轮轨系统振动的激扰源,也是引起车辆振动和轮轨作用力的主要原因。轨道不平顺对列车运行的安全性、平稳性和舒适性,以及车辆和轨道部件的工作寿命、环境噪声等都有重要影响^[1]。目前,描述轨道不平顺特性最

* 国家自然科学基金面上项目(5197858)

有效的方法是对其进行功率谱统计,即建立轨道谱。国内外学者对如何建立轨道谱进行了大量研究,其理论方法已逐渐成熟^[2]。其中,被广泛使用的轨道谱有美国 1 级—6 级谱、德国高低干扰谱、中国三大干线谱及中国高速铁路无砟轨道谱^[3]等。我国既有的轨道不平顺谱大多针对既有的普速铁路和高速铁路线,对地铁线路轨道不平顺谱的研究较少,只有北京、上海等一线城市建立了地铁轨道不平顺谱。而不同城市的地铁线路采用了不同的轨道结构形式、扣件形式及车辆形式,因此不同城市的地铁轨道不平顺谱差异较大。

随着成都地铁的快速发展,对列车运行平稳性、安全性、舒适性及环境振动噪声控制等提出更高的要求,亟需开展针对成都地铁线路进行轨道不平顺谱的分析研究。为此,本文基于成都地铁 7 号线 2017 年 10 月至 2020 年 2 月轨道检测车(以下简称“轨检车”)的检测数据,进行了轨道不平顺功率谱密度的计算与分析,对比其与目前国内外常用轨道谱的区别,并采用中国三大干线谱公式对成都地铁线路轨道谱进行拟合计算,得到了成都地铁 7 号线轨道不平顺谱拟合曲线。本研究填补了成都地铁轨道谱的空白,为轨道平顺性评估及轨道线路设计提供了依据,同时也可对其他城市地铁轨道谱的建立提供参考。

1 数据来源

本文采用轨检车对成都地铁 7 号线轨道弹性变形和永久变形的叠加状态进行动态检测。测试项目主要包括左右轨的高低不平顺、轨向不平顺、水平不平顺及轨距不平顺等,其测试范围及测量精度如表 1 所示。在此基础上,进一步设定车体垂横向振动加速度的测量范围为(−1~1)g(*g*为重力加速度),测量精度小于±0.01g;列车运行速度的测量范围为0~120 km/h,测量精度小于±0.2 km/h。

表 1 轨检车主要测试项目的测量范围及精度
Tab.1 Measuring range and accuracy of rail inspection vehicle main test item

测量项目	测量范围/mm	测量精度/mm
高低不平顺	±60	< ±1.0
轨向不平顺	±100	< ±1.5
水平不平顺	±200	< ±1.0
轨距不平顺	1 405 ~ 1 485	< ±0.8

轨检车对数据进行采样时,采用惯性基准原

理、无接触测量方式,采样间隔为 0.25 m,即采样点分布为 4 000 点/km,列车的检测速度为 40~55 km/h。提取得到统计期(2017 年 10 月至 2020 年 2 月)轨检车数据共计 40 组(2017 年 2 组、2018 年 17 组、2019 年 19 组及 2020 年 2 组)。统计期内成都地铁 7 号线未经历过轨道大修。每组数据均包括上行和下行两部分,数据长度为成都地铁 7 号线的运营线路长度。

2 轨道不平顺功率谱密度的计算及分析

2.1 计算方法

基于轨检车得到的轨道高低不平顺、轨向不平顺、轨距不平顺及水平不平顺数据,对采样数据进行预处理,去除异常值及趋势项。采用目前最常用的功率谱密度估计方法——Welch 法(改进的周期图法)进行功率谱密度计算。Welch 法首先对数据进行分段(各个子样本数据间允许重叠),然后在计算周期图之前对每段数据进行了加窗处理。Welch 法的这 2 项改进措施使得其数据集平均与平滑的优点于一体,在控制谱估计偏差上更灵活,其方差特性也较周期图法有较大改善。

设 $x(k)$ 为轨道不平顺检测数据(k 为自然数序列),再设轨道不平顺数据共分为 I 段, $x_i(k)$ 为分段处理后的第 i 段轨道平顺检测数据,则第 i 段轨道不平顺数据功率谱密度 $\hat{P}_{i,\text{PER}}(\omega)$ 的计算式为:

$$\hat{P}_{i,\text{PER}}(\omega) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{k=0}^{N-1} x_i(k) u(k) e^{-j\omega k} \right|^2 \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} [x_i(k)]^2 \quad (2)$$

式中:

- N —— $x(k)$ 的数据长度;
- U ——量纲一化因子,用以保证功率谱的渐进无偏估计;
- $u(k)$ ——窗函数;
- ω ——常量部分。

$x(k)$ 基于 Welch 法的功率谱密度估计 $\hat{P}_{\text{PER}}(\omega)$ 的计算式为:

$$\hat{P}_{\text{PER}}(\omega) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \hat{P}_{i,\text{PER}}(\omega) \quad (3)$$

本文将 40 组轨道不平顺数据(已剔除异常值和趋势项)分为上下行 2 个方向,以 1 024 m 为每段数据的计算长度(每段计算长度内共有 4 096 个采样点),相邻 2 段的数据重叠系数为 1/2。

选取矩形窗函数,按照 Welch 法通过编程计算求得该段轨道不平顺的功率谱密度。

2.2 计算结果分析与对比

2.2.1 计算结果分析

经过上述计算可以得到统计期内数据整合前被测轨道长波的高低不平顺谱、轨向不平顺谱、轨

距不平顺谱及水平不平顺谱,如图 1 所示。

由于统计期内该地铁线路未进行过大修,因此轨道不平顺功率谱的差别很小。进一步将数据以平均谱方式进行整合,整合后被测轨道的长波不平顺谱如图 2 所示。

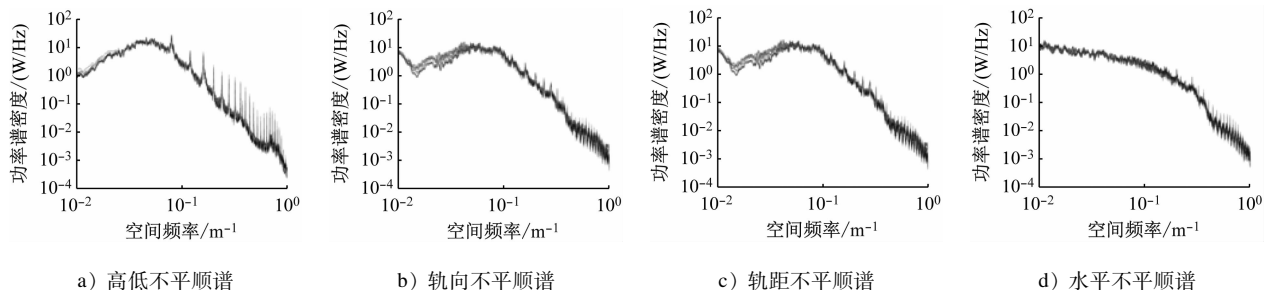
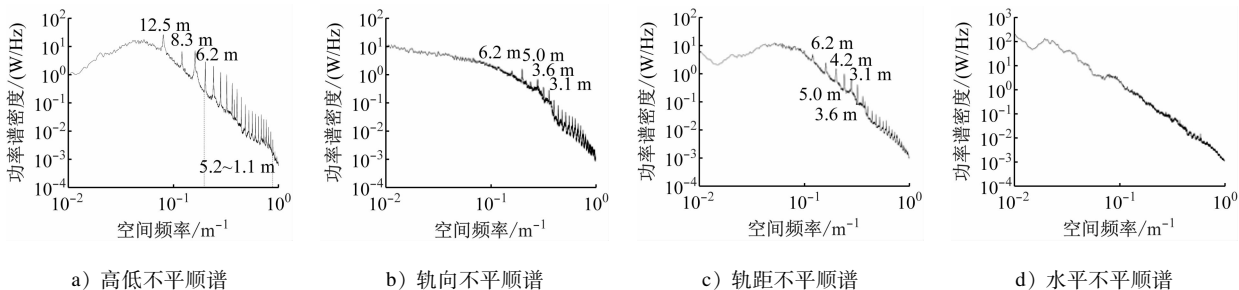


图 1 成都地铁 7 号线长波轨道不平顺谱(数据整合前)

Fig. 1 Long-wave track irregularity spectrum of Chengdu Metro Line 7 (before data integration)



注:图中数据为各不平顺谱的显著波长或波长范围。如“12.5 m”指空间频率为 0.08 m^{-1} 对应的波长为 12.5 m。余类同。

图 2 成都地铁 7 号线长波轨道不平顺谱(数据整合后)

Fig. 2 Long-wave track irregularity spectrum of Chengdu Metro Line 7 (after data integration)

图 2 中通过对显著波长的标注,可以看出该轨道不平顺谱具有以下频率特性:

1) 由于成都地铁轨道板的板长为 12.5 m,故高低不平顺谱中 12.5 m 周期性波长的长波不平顺反映了轨道板对轨道高低不平顺的影响。

2) 轨向不平顺谱和轨距不平顺谱中,周期性波长均为 6.2 m、5.0 m、3.6 m 及 3.1 m 等。这是因为轨距不平顺为左右轨轨向不平顺的差值,二者的周期性波长成分类似。这也表明了大多数轨向不平顺的产生原因是左右轨的轨向存在反向偏差,导致轨距随之发生变化。轨向及轨距的不平顺容易导致列车产生浮沉和点头等运动方式,可能加剧列车的蛇形运动,进而影响列车运行的平稳性。

3) 从高低、轨向、轨距不平顺谱可看出,在 1.1 ~ 5.0 m 波长范围内均存在空间频率为 0.04 m^{-1} 整数倍的窄带谱峰。成都地铁 7 号线的无缝钢轨每

隔 25 m 有 1 个焊缝,该空间频率与无缝钢轨相邻 2 个焊缝间的线路长度吻合,即钢轨焊缝不平顺对整个轨道长波不平顺谱的影响很大。实地考察发现,在钢轨打磨后 2 ~ 3 个月就会出现严重的钢轨焊缝不平顺。由此可见对于地铁线路而言,轨道焊缝不平顺已成为了严重影响轨道状态及列车运行的重要因素。

2.2.2 计算结果与国内外轨道谱的对比

为了更好地对成都地铁的轨道不平顺特性进行评价,本文将成都地铁 7 号线轨道高低不平顺谱和轨向不平顺谱的计算结果,分别与美国 5 级谱、美国 6 级谱、德国低干扰谱、德国高干扰谱、中国三大干线谱及中国高速铁路无砟轨道谱等国内外典型轨道谱进行对比,其对比结果如图 3 所示。

由图 3 可看出:对于高低不平顺和轨向不平顺而言,成都地铁 7 号线轨道不平顺功率谱密度明显

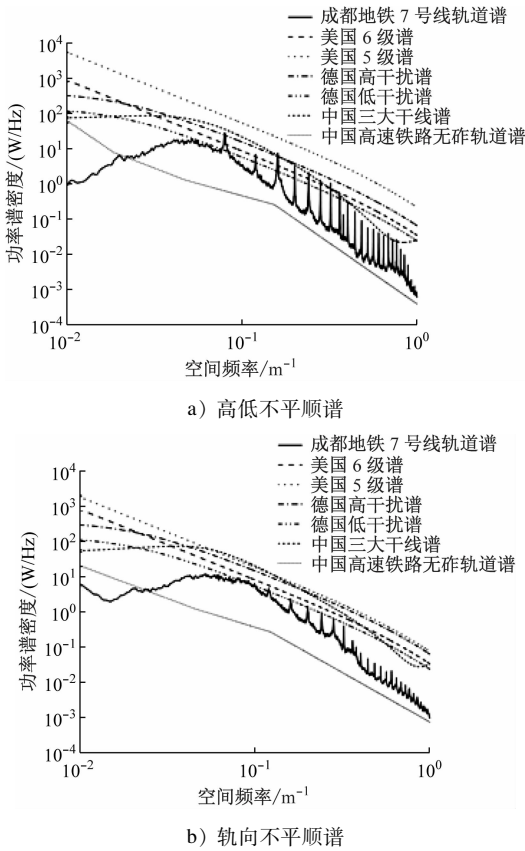


图3 成都地铁7号线轨道高低和轨向不平顺谱与国内外典型轨道谱的对比

Fig. 3 Comparing track elevation and track irregularity spectrum of Chengdu Metro Line 7 with typical track spectrum in China and abroad

小于美国5级谱和6级谱、德国高低干扰谱及中国三大干线谱,即与美国、德国及我国的普速铁路相比,成都地铁7号线的轨道平顺性更好。对于波长大于19 m(空间频率约为 0.0526 m^{-1})的长波频段,成都地铁7号线的轨道不平顺谱远小于国外轨道谱,说明了成都地铁7号线的长波平顺性远好于国外的轨道交通线路。但与我国的高速铁路无砟轨道谱相比,成都地铁7号线的各轨道不平顺功率谱密度仍略高,平顺性略差。

3 轨道不平顺谱曲线拟合及分析

对轨道不平顺数据进行功率谱估计,可以得到1组随空间频率变化的离散谱数据。在轨道线路的质量评估和动力学仿真研究中,往往较为关注功率谱曲线的总体趋势,而忽视了谱线局部的小幅波动,这会影响到计算的完整性。因此,本文选取多个参数确定的理论表达式,用以近似所估计的轨道

谱,这样既能保持谱线信息的总体完整性,又有利于轨道谱的使用和推广。

3.1 轨道不平顺数据的预处理

采用功率谱密度计算方法获得轨道不平顺数据,其轨道不平顺谱曲线一般存在较多周期性波长成分的谱峰。直接采用该曲线进行拟合,会导致拟合出的平滑曲线与原曲线的偏差较大,如图4所示。

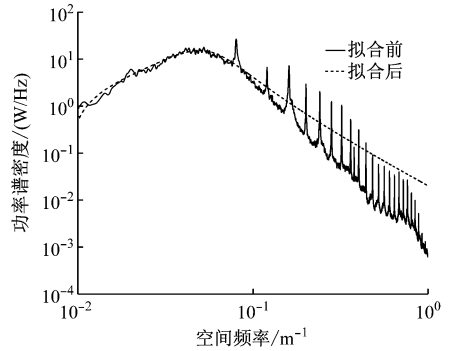


图4 未经预处理的轨道不平顺数据曲线拟合前后对比
Fig. 4 Comparison of un-preprocessed track irregularity data curve before and after fitting

考虑到众多谱峰均是由于钢轨焊缝不平顺导致,为消除钢轨焊缝不平顺对整体轨道不平顺谱的影响,应先对原始轨道谱曲线数据进行削峰和平滑的预处理工作,以使得轨道谱曲线较为光滑,便于后续的曲线拟合工作。

削峰是通过直接观察方式手动去除谱峰区段的数据,随后对功率谱密度与空间频率的双对数曲线采取线性插值的方法将数据补齐,削峰处理后的轨道不平顺谱曲线如图5所示。

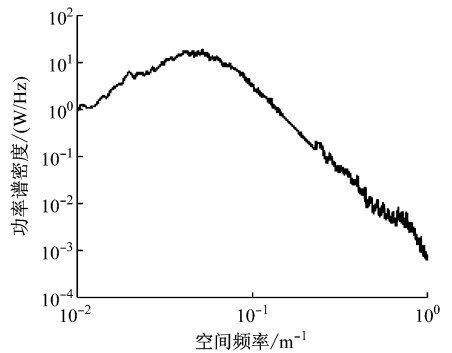


图5 削峰处理后的轨道不平顺谱曲线
Fig. 5 Curve of track irregularity spectrum after peak elimination

平滑则是采用三点逐段平均法对原始数据进行预处理,即对于谱线中任意相邻的3个点,取这3

个点的平均值作为3个点的中心点值,据此逐段对谱线进行处理。按这种方法对谱线进行多次平滑后即可获得理想的平滑曲线,平滑处理后的轨道不平顺谱曲线拟合前后对比如图6所示。

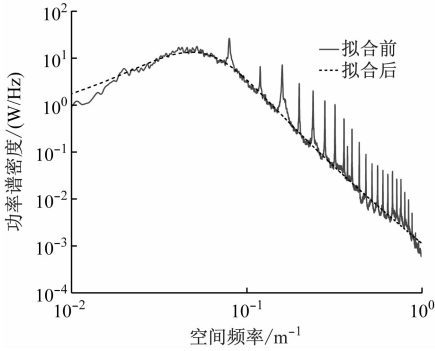


图6 平滑处理后的轨道不平顺谱曲线拟合前后对比

Fig. 6 Comparison of track irregularity spectrum curve after smoothing treatment before and after fitting

3.2 基于最小二乘法的曲线拟合原理

常见的曲线拟合方法主要基于最小二乘原理,通过不断计算拟合曲线与原始数据间总体方差的最小值,以寻找最优的拟合参数。根据理论函数与待定参数间的关系,基于最小二乘法的曲线拟合原理可以分为线性最小二乘法与非线性最小二乘法2种拟合方法。考虑到轨道谱曲线难以用简单的线性公式进行拟合,因此本文采用非线性最小二乘法。

设 w 为原始数据的自变量, w_q 为第 q 个原始数据自变量, y 为原始数据的因变量, y_q 为第 q 个原始数据的因变量。令 $z(w, b)$ 为与 w, b 相关的理论函数, b 为待定参数, b_p 为第 p 个待定参数, $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, n 为待定参数的数量。当 $y = z(w, b)$ 是 b 的非线性函数时,通过最小二乘原理求解 b ,该方法称为非线性最小二乘法。

先给出 b_p 的初估值 $b_{p,0}$, 令 Δ_p 为:

$$\Delta_p = b_p - b_{p,0}, p = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

由此,确定 b_p 的问题就转化为确定 Δ_p 的问题了。设 z_q 为第 q 个与 w, b 相关的理论函数,将理论函数在 $[b_{1,0}, b_{2,0}, \dots, b_{n,0}]$ 点附近作泰勒公式展开,并略去 Δ_p 的二次及二次以上的项,则有:

$$z_q = z[w_q, b_{1,0}, b_{2,0}, \dots, b_{n,0}] \quad (5)$$

$$z(w_q, b) = z[w_q, b_1, b_2, \dots, b_n] \approx$$

$$z_q + \frac{\partial z_q}{\partial b_1} \Delta_1 + \frac{\partial z_q}{\partial b_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial z_q}{\partial b_n} \Delta_n \quad (6)$$

设 Q 为拟合理论曲线和原始数据的均方差, m 为原始数据长度。令 $Q = \sum_{q=1}^m [y_q - z(w_q, b)]^2$, 将

式(6)代入,则有:

$$Q \approx \sum_{q=1}^m \left[y_q - \left(z_q + \frac{\partial z_q}{\partial b_1} \Delta_1 + \frac{\partial z_q}{\partial b_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial z_q}{\partial b_n} \Delta_n \right) \right]^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_p} = \frac{\partial Q}{\partial \Delta_p} = 2 \sum_{q=1}^m \left[y_q - z_q - \left(\frac{\partial z_q}{\partial b_1} \Delta_1 + \frac{\partial z_q}{\partial b_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial z_q}{\partial b_n} \Delta_n \right) \right] \left(-\frac{\partial z_q}{\partial b_p} \right) \quad (8)$$

由 $\frac{\partial Q}{\partial b_p} = 0$ 可推出:

$$\sum_{q=1}^m \frac{\partial z_q}{\partial b_p} \left(\frac{\partial z_q}{\partial b_1} \Delta_1 + \frac{\partial z_q}{\partial b_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial z_q}{\partial b_n} \Delta_n \right) = \sum_{q=1}^m \frac{\partial z_q}{\partial b_p} (y_q - z_q) \quad (9)$$

设 a_{qp} 为 z_q 和 b_p 的偏导数,即令 $a_{qp} = \frac{\partial z_q}{\partial b_p}$,

则有:

$$M = (a_{qp})_{mn} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial b_1} & \frac{\partial z_1}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial b_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial b_1} & \frac{\partial z_2}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial b_1} & \frac{\partial z_m}{\partial b_2} & \dots & \frac{\partial z_m}{\partial b_n} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中: M 为 $[z_1, z_2, \dots, z_m]$ 的 Jacobi 矩阵。

于是式(9)可写成:

$$M^T M \Delta = M^T (y - z) \quad (11)$$

解式(10)和式(11)可得

$$\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n] \quad (12)$$

进而求得:

$$b_p = b_{p,0} + \Delta_p \quad (13)$$

当 Δ_p 较大时,可令当前的 b_p 值作为新的初值。重复上述计算,求得新的 Δ_p 和 b_p 。通过反复迭代,直到满足所要求的精度为止。

3.3 基于中国三大干线谱理论公式的曲线拟合

本研究的轨道不平顺谱理论公式拟从目前应用最广的美国1级—6级谱、德国高低干扰谱、中国三大干线谱及中国高速铁路无砟轨道谱中选择。从图3的对比中可看出,由于美国1级—6级谱和德国高低干扰谱均受其拟合公式的限制,生成的曲线是单调递减曲线,无法较好地模拟成都地铁7号线轨道不平顺功率谱密度随空间频率增大呈现先增加后减小的特征。而中国高速铁路无砟轨道谱

的拟合效果不如中国三大干线谱,因此本文选用了中国三大干线谱作为理论公式,并进行了曲线拟合。

中国三大干线谱的优势在于其轨道高低、轨向、轨距及水平等不平顺功率谱密度采用同一个解析式(各变量的系数不同)来表达,便于实际使用时拟合曲线的生成。设 f 为空间频率,则其理论计算式为:

$$S(f) = \frac{A(f^2 + Bf + C)}{f^4 + Df^3 + Ef^2 + Ff + G} \tag{14}$$

表 2 成都地铁 7 号线轨道不平顺谱宽度的特征系数

Tab.2 Characteristic parameters of track irregularity spectrum width of Chengdu Metro Line 7

测试项目	特征系数取值						
	A	B	C	D	E	F	G
高低不平顺	7.247×10^{-5}	12.630	0.036 54	-0.168 5	0.013 79	-5.396×10^{-4}	1.089×10^{-5}
轨向不平顺	2.516×10^{-5}	30.200	1.792 00	-0.254 6	0.029 66	-1.544×10^{-3}	3.663×10^{-5}
水平不平顺	1.446×10^{-4}	43.780	-0.002 07	-0.007 0	0.011 45	9.976×10^{-4}	-5.936×10^{-6}
轨距不平顺	3.774×10^{-3}	1.217	0.013 56	0.692 0	-0.038 30	7.436×10^{-4}	-3.590×10^{-6}

4 结语

本文基于成都地铁 7 号线的 2017 年 10 月至 2020 年 2 月轨道不平顺检测数据,建立了该线轨道不平顺谱,分析了该线轨道长波不平顺的频谱特性,并将所得的轨道谱与国内外典型的轨道谱进行了对比,最后采用中国三大干线谱公式进行该线轨道谱的曲线拟合。本文得到的主要结论有:

- 1) 地铁高低不平顺谱峰与轨道板板长相关,这表明轨道板板缝会影响轨道的长波高低不平顺谱。
- 2) 轨向不平顺谱与轨距不平顺谱的周期性波长成分类似,轨向和轨距的不平顺易导致列车产生浮沉及点头等运动方式,也可能加剧列车的蛇形运动,进而影响列车运行平稳性。
- 3) 成都地铁 7 号线轨道的高低、轨向及轨距不平顺谱均存在空间频率为 0.04 m^{-1} 整数倍的窄带谱峰。该空间频率与无缝钢轨相邻 2 个焊缝间的线路长度吻合,这表明钢轨焊缝不平顺对整个轨道长波不平顺谱的影响较大,严重影响了轨道状态及列车运行。
- 4) 成都地铁 7 号线轨道高低和轨向不平顺谱的功率谱密度明显小于美国 5 级谱和 6 级谱、德国

式中:
 $S(f)$ ——轨道不平顺功率谱;
 $A-G$ ——轨道不平顺功率谱密度的特征系数。
对于不同线路和不同类型的轨道不平顺,应分别采用不同的特征系数。基于非线性最小二乘法,以式(14)作为拟合公式,对预处理后的数据(见图 6)进行曲线拟合,拟合后得到成都地铁 7 号线轨道不平顺谱在不同测试项目下对应的特征系数($A-G$)取值,如表 2 所示。

高低干扰谱及中国三大干线谱,这说明成都地铁 7 号线的轨道平顺性优于美国、德国及中国的普速铁路,且在波长大于 19 m 长波频段中的表现尤为突出。但是,成都地铁 7 号线的轨道平顺性相较我国的高速铁路无砟轨道仍较差。

5) 中国三大干线谱适用于成都地铁 7 号线,通过非线性最小二乘法计算可得到曲线拟合系数。

参考文献

[1] 田国英. 高速铁路轨道不平顺功率谱及其与行车品质关系研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2015.
TIAN Guoying. Study on power spectrum of track irregularity of high-speed railway and its relationship with driving quality[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2015.

[2] 佐藤吉彦. 新轨道力学[M]. 徐涌, 译. 北京: 中国铁道出版社, 2001.
SATO Yoshihiko. The track mechanics[M]. XU Yong, Trans. Beijing: China Railway Publishing House, 2001.

[3] 余翠英, 向俊, 陈涛, 等. 高速铁路无砟轨道谱统计分析[J]. 铁道科学与工程学报, 2016, 13(9): 1659.
YU Cuiying, XIANG Jun, CHEN Tao, et al. Statistical analysis on ballastless track spectrum of high-speed railway[J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2016, 13(9): 1659.

(收稿日期:2021-02-24)