

轨道交通超高顺坡率变化的缓和曲线盾心平面坐标计算及盾心曲线拟合方法

朱礼佳

(上海市政工程设计研究总院(集团)有限公司, 200092, 上海//工程师)

摘要 目的:当缓和曲线的超高顺坡率变化时,不能采用常规的缓和曲线盾心坐标计算方法。此外,利用三次抛物线对此类缓和曲线盾心坐标拟合的精度通常也难以满足设计要求。因此需研究超高顺坡率变化的缓和曲线盾心平面坐标计算及曲线拟合方法。方法:基于超高顺坡率变化的缓和曲线,构建等效缓和曲线模型,设置虚拟的曲线段轨道超高值,进而计算曲线段上任意点的盾心偏移平面坐标。通过优化既有盾心缓和曲线拟合模型来提升曲线拟合精度,使之满足设计要求。引入校正决定系数对拟合曲线方程的精度进行准确评价,给出了超高顺坡率变化的缓和曲线盾心坐标拟合方程的拟合优度,并进一步给出了相应的拟合优度判断区间。以上海轨道交通崇明线为例,对拟合方程进行优化。结果及结论:利用等效缓和曲线可精确地计算出超高顺坡率变化缓和曲线上任意点的盾心坐标;适当增加拟合阶数,可较好地满足拟合精度的设计要求。

关键词 轨道交通;缓和曲线;盾心坐标;盾心曲线

中图分类号 U212.3

DOI:10.16037/j.1007-869x.2023.08.026

Planar Coordinate Calculation and Curve Fitting Method for Transition Curve Shield Center of Variable Super-elevation Slope in Rail Transit

ZHU Lijia

Abstract Objective: When transition curve super-elevation varies along with slope, conventional methods for calculating transition curve shield center coordinates are insufficient. Additionally, the fitting accuracy of such transition curve shield center coordinates using cubic parabolas often fails to meet design requirements as well. Therefore, it is necessary to investigate the calculation of shield center planar coordinates and curve fitting methods for transition curves with variable super-elevation slopes. Method: An equivalent transition curve model is constructed based on the transition curve with variable super-elevation slopes. Virtual curve segment track super-elevation values are set for calculating the shield center offset planar

coordinates at any point on the curve segment. The accuracy of curve fitting is improved by optimizing existing models for shield center curve fitting, ensuring compliance with design requirements. The coefficient of determination is introduced to accurately evaluate the accuracy of the fitting curve equation. The goodness of fit for the transition curve shield center coordinate fitting equation with variable super-elevation slopes is determined, and the corresponding goodness of fit intervals are provided. The fitting equation is optimized using the example of Shanghai Rail Transit Chongming Line. Result & Conclusion: The shield center coordinates at any point on the transition curve with variable super-elevation slopes can be accurately calculated using the equivalent transition curve. Increasing the fitting order appropriately can better meet the design requirements for fitting accuracy.

Key words rail transit; transition curve; shield center coordinate; shield center curve

Author's address Shanghai Municipal Engineering Design Institute (Group) Co., Ltd., 200092, Shanghai, China

轨道交通车辆经过曲线段时会产生离心力。为了平衡离心力,提升乘坐舒适度,曲线段轨道需设置超高。曲线段轨道超高值(以下简称“超高值”)一般在缓和曲线内递减,其超高顺坡率不宜大于2‰。由于存在轨道超高,车辆会产生倾角,在盾构区间内,车辆中心线就会偏离盾构中心线,这种偏移即为盾心偏移。在设计过程中,可将该偏移量提前计入盾心坐标中,使盾构中心线与车辆中心线重合,从而提高盾构掘进准确度,降低后期调线调坡难度。

超高顺坡率恒定的缓和曲线盾心坐标计算方法已相对成熟。然而,在实际设计过程中,受城市建设条件的限制,常会遇到缓和曲线侵入站台的情况。对此,设计规范明确要求:在车站站台有效长度范围内,超高值不应大于15 mm^[1-2]。由此可知,

当站台端处超高值超过 15 mm 时,进站前后的缓和曲线超高顺坡率不同。对于超高顺坡率变化的缓和曲线,常规的三次抛物线拟合曲线往往难以满足设计精度要求。对此类缓和曲线的盾心坐标计算及曲线的拟合分析也尚未有相关研究。本文利用构建等效模型的方法得到超高顺坡率变化的缓和曲线任意点盾心偏移平面坐标的计算方法,通过优化拟合模型提升盾心曲线拟合精度,得到轨道交通盾心曲线拟合优度的判断方法,以期为各类轨道交通设计及盾构施工提供理论支撑。

1 顺坡率固定的缓和曲线坐标计算

一般情况下,缓和曲线上的超高顺坡率是固定值,在求得缓和曲线线路平面坐标后,结合盾心偏移量,即可求出缓和曲线盾心平面坐标。

1.1 盾心平面偏移量的计算

单圆盾构盾心偏移断面如图 1 所示。由几何关系可以求得盾心横向偏移量 e 为:

$$e = Hh/S \quad (1)$$

式中:

H ——轨面至盾心距离;

h ——轨道超高量;

S ——轨距。

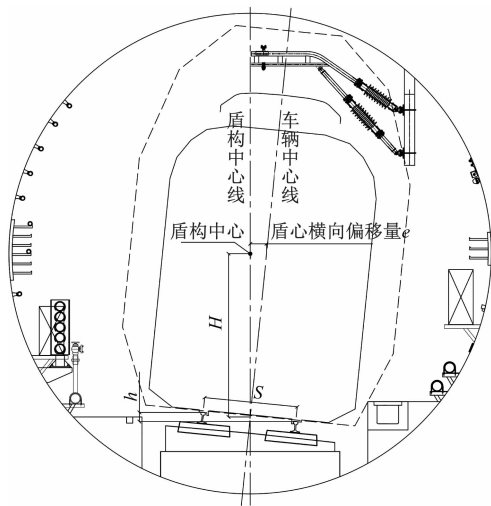


图 1 单圆盾构盾心偏移断面示意图

Fig. 1 Profile diagram of single circular shield center offset

1.2 线路平面坐标计算

为方便计算,以直缓点为原点,建立绝对坐标系。则绝对坐标系下的缓和曲线盾心偏移如图 2 所示。设曲线半径为 R ,缓和曲线总长度为 L ,缓和曲

线上任意点 λ 的平面坐标为 (x, y) , λ 与直缓点间的缓和曲线长度为 l 。

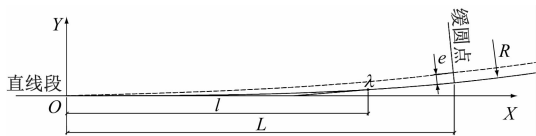


图 2 绝对坐标系下缓和曲线盾心偏移示意图

Fig. 2 Diagram of transition curve shield center offset in absolute coordinate system

利用泰勒级数展开,并根据轨道交通设计精度要求取其前两项后,得到点 λ 的线路平面坐标 (x, y) 为^[3]:

$$\begin{cases} x = l - l^5/(40 R^2 L^2) \\ y = l^3/(6 RL) - l^7/(336 R^3 L^3) \end{cases} \quad (2)$$

1.3 盾心平面坐标计算

对于点 λ 对应的横向偏移量 δ 可由超高引起的横向偏移量求得:

$$\delta = el/L = Hhl/(SL) \quad (3)$$

设点 λ 处缓和曲线切线与 X 轴夹角为 α ,其中 $\alpha = l^2/(2 RL)$ 。将 $\sin \alpha$ 及 $\cos \alpha$ 进行泰勒级数展开并取其前两位为有效精度值。那么超高顺坡率固定情况下缓和曲线盾心平面坐标 (x_a, y_a) 可以表示为:

$$\begin{cases} x_a = x - \delta \sin \alpha = l - Hhl^3/(2 SRL^2) - l^5/(40 R^2 L^2) + Hhl^7/(96 SR^3 L^4) \\ y_a = y + \delta \cos \alpha = Hhl/(SL) + l^3/(6 RL) - Hhl^5/(8 SR^2 L^3) - l^7/(336 R^3 L^3) \end{cases} \quad (4)$$

2 顺坡率变化的缓和曲线盾心计算

2.1 缓和曲线上任意点的超高

对于超高顺坡率变化的缓和曲线,其平面线路坐标与超高顺坡率无关,故线路平面坐标计算方法与一般情况相同。

由式(1)可知,缓和曲线进站前后超高不同, e 也不同,故盾心坐标会随 e 的变化而变化。为便于计算,本文以直缓点为原点,以 l 为自变量,超高为因变量,即可得到超高顺坡率固定和超高顺坡率变化时的缓和曲线 $h-l$ 关系如图 3 所示,其中 ρ_0 为固定超高顺坡率, ρ_1 为超高顺坡率有效站台外顺坡率, ρ_2 为有效站台内顺坡率, l_x 为有效站台边缘与直缓点间的缓和曲线长度, h_m 为最大轨道超高值, h_0 为有效站台边缘处的轨道超高值,且有 $0 \leq h_0 \leq$

15 mm。

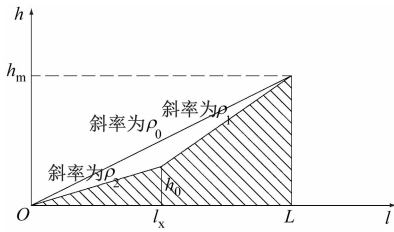


图3 缓和曲线 $h-l$ 关系图

Fig. 3 Diagram of transition curve $h-l$ relation

2.2 构建等效缓和曲线

本文采用构建等效缓和曲线的方法计算 l_x-L 段原缓和曲线的偏移盾心坐标。考虑到原缓和曲线平面上各点对应曲率不同,等效缓和曲线需保证原缓和曲线的平面参数不变。由于超高顺坡率变化点位于站台边缘,不在直缓点上,其对应的缓和曲线曲率非零,故不可将该段缓和曲线简单等效为顺坡率为 ρ_1 、缓长为 $(L-l_x)$ 的缓和曲线。

将该段缓和曲线等效超高为 h_m+h_b ,缓长为 L ,超高顺坡率为 ρ_1 的缓和曲线。等效缓和曲线的 $h-L$ 关系如图4所示。此时该段缓和曲线的盾心坐标即为该等效模型中等效缓和曲线盾心坐标减去由虚拟超高 h_b 产生的偏移量在 x 和 y 轴上的分量。

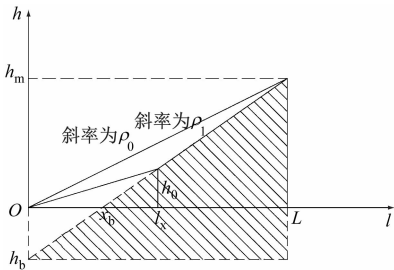


图4 等效缓和曲线 $h-L$ 关系图

Fig. 4 Diagram of equivalent transition curve $h-L$ relation

由图4可求得,等效缓和曲线与横轴的交点横坐标 $x_b = (h_m l_x - h_0 L) / (h_m - h_0)$,则虚拟超高 $h_b = h_0 x_b / (l_x - x_b)$,由 h_b 产生的偏移量 $e_b = H h_b / S$,由 $(h_m + h_b)$ 而产生的偏移量 $e_c = H (h_m + h_b) / S$ 。由此,对于等效缓和曲线上任意点 λ_c ,其对应的横向偏移量 δ_c 可以表示为:

$$\delta_c = l e_c / L = H l (h_m + h_b) / (L S), l_x \leq l \leq L \quad (5)$$

由此可知, l_x-L 段缓和曲线上任意处的盾心平面坐标 (x_c, y_c) 为:

$$\begin{cases} x_c = x - (\delta_c - e_b) \sin \alpha = l - l^5 / (40 R^2 L^2) - \\ \quad [H l (h_m + h_b) / L S - H h_b / S] \sin [l^2 / (2 R L)] \\ y_c = y + (\delta_c - e_b) \cos \alpha = l^3 / (6 R L) - \\ \quad l^7 / (336 R^3 L^3) + [H l (h_m + h_b) / (L S) - \\ \quad H h_b / S] \cos [l^2 / (2 R L)] \end{cases} \quad (6)$$

3 超高顺坡率变化的缓和曲线盾心拟合

对于超高顺坡率固定的缓和曲线,通常采用三次抛物线来拟合盾心曲线;对于超高顺坡率变化的缓和曲线,采用三次抛物线拟合一般会导致盾心拟合结果误差较大。

3.1 盾心拟合曲线优度评价

本文对盾心坐标离散点进行线性回归拟合,并引入统计学决定系数 R^2 来评价回归模型的拟合优度。 R^2 可表示为^[4]:

$$R^2 = s_{SR} / s_{ST} = 1 - s_{SE} / s_{ST} \quad (7)$$

式中:

s_{SR} ——回归平方和;

s_{SE} ——残差平方和;

s_{ST} ——总平方和。

一般情况下, R^2 越接近1,缓和曲线拟合的效果越好。但随着离散点样本量的增加,盾心拟合方程的 R^2 必然随之增加,另一方面,个别离散点产生的较大误差不一定能够准确反馈至 R^2 ,两者并不是正相关的。故利用 R^2 无法真正定量说明拟合方程的准确程度,只能大概对拟合的好坏进行定性分析。

在多元线性回归中,校正决定系数 \bar{R}^2 引入了样本数量 n 和特征数量 p ,用来对拟合曲线方程的精度进行准确评价。 \bar{R}^2 表示为:

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)(n - 1) / (n - p - 1) \quad (8)$$

此时 \bar{R}^2 越接近1,表示缓和曲线拟合的精度越高,拟合度越好。

若设计过程中的精度要求为拟合曲线与实际盾心坐标的绝对误差不大于 E_a ,那么由于四舍五入的关系,实际各点盾心坐标与拟合曲线间的绝对误差应控制在 $E_a/2$ 内。假设对于任意满足拟合误差精度要求的缓和曲线,以 Δl 为步长取得的所有离散点盾心坐标与拟合曲线间的绝对误差为 ε ,并分别取 $E_a/2, 3E_a/8, E_a/4, E_a/8$ 作为特征点,建立误差绝对值域权重集合 $\varphi = \{a, b, c, d\}$,其中 a, b, c 和 d 分

别为误差绝对值于 $[3E_a/8, E_a/2)$ 、 $[E_a/4, 3E_a/8)$ 、 $[E_a/8, E_a/4)$ 和 $(0, E_a/8]$ 内的离散点占比,且有 $a + b + c + d = 1$ 。

对《地铁设计规范》^[1] 和《市域(郊)铁路设计规范》^[2] 中的各标准缓和曲线进行拟合以分析误差,其中地铁以设计最高速度为 80 km/h 的标准计算,市域铁路以设计最高速度为 160 km/h 的标准计算,暂不考虑欠超高及过超高影响。设最大允许拟合误差 E_a 为 1 mm,并将步长设置为 1 m,取其中最大绝对误差值大于 $E_a/8$ 且小于等于 $E_a/2$ 的缓和曲线进行整理,并总结得到各离散点误差绝对值域的权重,如表 1—表 2 所示。

表 1 地铁拟合误差较大缓和曲线参数表

Tab.1 Parameters of transition curves with larger fitting error for metro

R/m	L/m	h_m /mm	a	b	c	d
350	60	120	0	0.016 7	0.133 3	0.850 0
400	65	120	0	0.015 4	0.107 7	0.876 9
450	70	120	0	0.014 3	0.100 0	0.885 7
500	70	120	0	0	0.028 6	0.971 4
550	70	120	0	0	0.014 3	0.985 7
600	70	120	0	0	0.014 3	0.985 7

表 2 市域(郊)铁路拟合误差较大缓和曲线参数表

Tab.2 Parameters of transition curves with large fitting error for city (suburban) railway

R/m	L/m	h_m /mm	a	b	c	d
1 600	210	145	0.019 0	0.014 3	0.509 5	0.457 2
1 700	200	135	0.005 0	0.015 0	0.125 0	0.855 0
1 800	185	125	0	0	0.027 0	0.973 0
1 900	180	125	0	0	0.016 7	0.983 3

取各权重指标平均值作为相应制式的误差绝对值域权重集合,并作为最小决定系数 R^2_{\min} 中数据残差的权重,即:

$$\begin{cases} \varphi_m = \{a, b, c, d \mid a = 0, b = 0.007\,7, \\ \qquad c = 0.066\,4, d = 0.925\,9\} \\ \varphi_s = \{a, b, c, d \mid a = 0.006\,0, b = 0.007\,3, \\ \qquad c = 0.169\,6, d = 0.817\,1\} \end{cases} \quad (9)$$

式中:

- φ_m ——地铁的数据残差权重;
- φ_s ——市域铁路的数据残差权重。

设缓和曲线坐标取值范围为 $[L_{\min}, L_{\max}]$,那么该段缓和曲线长度 $\Delta L = L_{\max} - L_{\min}$ 。在该段缓和曲线上以步长 $\Delta l = 1$ m 选取离散点并进行曲线拟合,则计算可得最小决定系数 R^2_{\min} 为:

$$R^2_{\min} = 1 - \left[a\Delta L \left(\frac{E_a}{2} \right)^2 + b\Delta L \left(\frac{3E_a}{8} \right)^2 + c\Delta L \left(\frac{E_a}{4} \right)^2 + d\Delta L \left(\frac{E_a}{8} \right)^2 \right] / \sum_{L_{\min}}^{L_{\max}} (y'' - \bar{y}'')^2 \quad (10)$$

其中 \bar{y}'' 为 y'' 的均值。

由 R^2_{\min} 进一步计算可得,最小校正决定系数 \bar{R}^2_{\min} 为:

$$\bar{R}^2_{\min} = 1 - \Delta L(1 - R^2_{\min})/(\Delta L - p - 1) \quad (11)$$

3.2 案例分析

本文以上海轨道交通市域线崇明线工程(以下简称“崇明线”)中一处缓和曲线为例进行分析。崇明线某处线路平面示意图如图 5 所示。该线为市域铁路,最高设计时速为 120 km,有效站台范围内最大超高不大于 15 mm。图 5 中 SJD11 缓和曲线侵入车站有效站台范围内的长度 l_x 约为 31.173 m,其曲线半径 R 为 500 m,缓和曲线长度 L 为 115 m,超高值 h_m 为 135 mm,有效站台内顺坡率 ρ_2 为 0.481,有效站台外顺坡率 ρ_1 为 1.432,轨面至盾构中心距离 H 为 2 150 mm,轨距 S 为 1 500 mm。

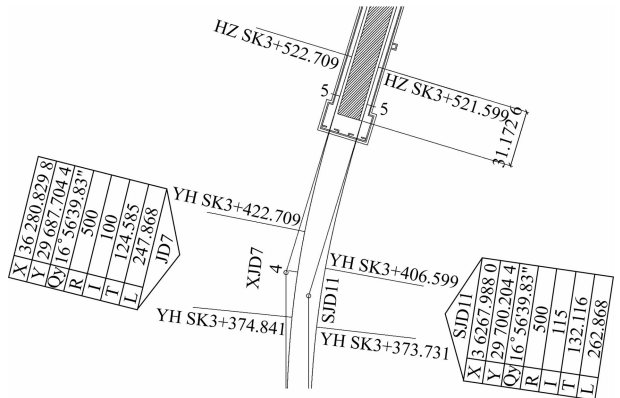


图 5 崇明线某处平面线路示意图截图
Fig. 5 Screenshot of planar diagram of a route section on Chongming Line

3.2.1 拟合优度判断区间

该段缓和曲线长度 $[L_{\min}, L_{\max}]$ 取值范围为 $[31\text{ m}, 115\text{ m}]$,通常轨道交通盾心拟合曲线最大误差四舍五入后需控制在 1 mm 内。由于该线路为市域铁路制式,故选择 φ_s 作为误差绝对值域权重集合。根据式(10)及式(11)可求得最小校正绝对系数 $\bar{R}^2_{\min} = 0.999\,999\,984\,062\,725$,即等效缓和曲线拟合方程的拟合优度判断区间为 $[0.999\,999\,984\,062\,725, 1]$ 。

3.2.2 三次抛物线拟合分析

根据已知的线路条件,由式(6)可以求得 SJD11

缓和曲线上任意点 λ_c 的盾心平面坐标 (x_c, y_c) 为:

$$\begin{cases} x_c = l + 3.692 \times 10^{-7} l^2 - 1.784 \times 10^{-8} l^3 - \\ \quad 7.561 \times 10^{-12} l^5 \\ y_c = -0.042 + 0.002 l + 2.899 \times 10^{-6} l^3 + \\ \quad 1.605 \times 10^{-12} l^4 - 7.757 \times 10^{-14} l^5 - \\ \quad 1.566 \times 10^{-17} l^7 \end{cases} \quad (12)$$

在该段缓和曲线上选取 n 个离散点,以第 k 离散点与直缓点间的缓和曲线长度 l_k 构成集合 $l_i = \{l_1, l_2, \cdots, l_k, \cdots, l_n\}$ 。由于 $31.173 \text{ m} \leq l_k \leq 115.000 \text{ m}$,以 1 m 为步长取值,即 $l_i = \{32, 33, \cdots, 115\}$ 。根据式 (12) 的计算结果,求得 l_i 上各点相应的盾心平面坐标,再通过最小二乘法对离散坐标点进行曲线拟合。采用三次抛物线拟合,得到等效缓和曲线的拟合方程 $f_3(x_c)$:

$$f_3(x_c) = -0.053\,095\,9 + 2.659\,16 \times 10^{-3} x_c - \\ 1.117\,58 \times 10^{-5} x_c^2 + 2.966\,31 \times 10^{-6} x_c^3 \quad (13)$$

同时计算可得,该拟合曲线校正绝对系数 $\bar{R}^2 = 0.999\,999\,977\,490\,687$,不在拟合优度判断区间内,故判断拟合曲线 $f_3(x_c)$ 的精度不满足要求。

选取若干典型离散点坐标,与 $l_i = \{32, 33, \cdots, 115\}$ 对应的 y_c 和 $f_3(x_c)$ 计算结果进行对比,进而分析误差。三次抛物线典型离散点误差分析表如表 3 所示。由表 3 可见,三次抛物线拟合后,局部离散点绝对误差大于 0.5 mm ,不满足设计要求。这与拟合优度判断结果一致。

表 3 三次抛物线典型离散点误差分析表

Tab.3 Error analysis for typical discrete points of cubic parabola

l_k/m	x_c/m	y_c/m	$f_3(x_c)/\text{m}$	绝对误差/ m
32	31.999 539 73	0.118 175 090	0.117 748 158	0.000 426 932
114	113.832 775 70	4.480 638 762	4.480 196 319	0.000 442 442
115	114.825 660 00	4.596 389 514	4.595 791 761	0.000 597 753

3.2.3 四次曲线拟合分析

将拟合函数优化为四次曲线进行计算分析。其等效缓和曲线拟合方程 $f_4(x_c)$ 如式 (14) 所示。

$$f_4(x_c) = -0.036\,032 + 0.001\,563\,26 x_c + \\ 1.363\,6 \times 10^{-5} x_c^2 + 2.73 \times 10^{-6} x_c^3 + \\ 8.05 \times 10^{-10} x_c^4 \quad (14)$$

计算可得,该等效缓和曲线拟合曲线的 $\bar{R}^2 = 0.999\,999\,999\,420\,201$,位于拟合优度判断区间内,故可判断该拟合结果满足精度要求。

针对 $l_i = \{32, 33, \cdots, 115\}$ 求出对应的 y_c 和

$f_4(x_c)$,选取拟合结果中误差较大的典型离散点坐标进行比对分析,得到四次曲线典型离散点误差分析表如表 4 所示。增加拟合阶数后,最大误差由原三次抛物线的约 0.6 mm 降低至四次曲线的约 0.1 mm ,说明该拟合曲线方程满足设计要求。

表 4 四次曲线典型离散点误差分析表

Tab.4 Error analysis for typical discrete points of quadratic parabola

l_k/m	x_c/m	y_c/m	$f_3(x_c)/\text{m}$	绝对误差/ m
32	31.999 539 73	0.118 175 090	0.118 251 199	0.000 076 109
114	113.832 775 70	4.480 638 762	4.480 573 858	0.000 064 903
115	114.825 660 00	4.596 389 514	4.596 289 643	0.000 099 871

4 结语

本文研究了超高顺坡率变化的缓和曲线盾心平面坐标计算方法及其盾心曲线拟合方法,对缓和曲线盾心坐标计算方法进行了完善。该盾心曲线拟合方法更适应目前轨道交通的设计现状。通过本文的等效缓和曲线法可准确计算超高顺坡率变化的缓和曲线盾心平面坐标。本文基于盾心拟合曲线最大误差,计算误差绝对值域权重集合,进而判断拟合优度,检验盾心拟合曲线的校正决定系数,对拟合精度是否满足要求进行定性判断,以此决定是否需要优化拟合模型,从而有效提高设计效率及设计质量。

参考文献

[1] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 地铁设计规范: GB 50157—2013[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014: 38.
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Code for design of metro: GB 50157—2013 [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2014: 38.

[2] 国家铁路局. 市域(郊)铁路设计规范: TB 10624—2020 [S]. 北京: 中国铁道出版社有限公司, 2021: 34.
National Railway Administration of People's Republic of China. Code for design of suburban railway: TB 10624—2020 [S]. Beijing: China Railway Publishing House Co., Ltd, 2021: 34.

[3] 张斌. 轨道交通盾构隧道盾心计算方法探讨[J]. 现代城市轨道交通, 2007(4): 39.
ZHANG Bin. Calculation of shield center line for rail transit tunneling[J]. Modern Urban Rail Transit, 2007(4): 39.

[4] 贾怀勤. 应用统计[M]. 5 版. 北京: 对外经济贸易大学出版社, 2010: 268.
JIA Huaqin. Applied statistics[M]. 5th ed. Beijing: University of International Business and Economics Press, 2010: 268.

(收稿日期:2021-03-24)