

基于 Max-plus 代数法的市域铁路快慢车运行特性

郑翔^{1,2,3} 徐行方^{2,3*} 刘薇⁴ 鲁玉^{2,3}

(1. 广州地铁设计研究院股份有限公司, 510010, 广州; 2. 同济大学道路与交通工程教育部重点实验室, 201804, 上海; 3. 上海市轨道交通结构耐久与系统安全重点实验室, 201804, 上海; 4. 国家开发银行苏州市分行, 215128, 苏州//第一作者, 高级工程师)

摘要 目的: 为编制市域铁路快慢车模式的运行计划和检验快慢车方案的鲁棒性, 针对快慢车运行特点, 提出一种基于 Max-plus 代数法的市域铁路快慢车运行系统的闭环模型。方法: 将列车运行系统作为典型的离散事件动态系统, 定义其模型变量与参数, 同时定义系统约束规则; 基于 Max-plus 代数法建立列车运行系统 Max-plus 开环线性模型, 并进行了快慢车模式下开环线性模型的变换; 基于 Max-plus 代数法建立列车运行系统 Max-plus 闭环线性模型, 并以一段计划开行快慢车的市域铁路作为算例, 对该算例建立闭环模型, 并求解与分析输出演化过程, 最后通过状态转移变量矩阵的求解结果生成列车运行时时刻表。结果及结论: 该算例的快慢车运行系统稳定, 一个周期系统的缓冲时间为 291 s; 通过单参数摄动情形下的鲁棒性分析获得了使快慢车运行系统保持运行一致均衡性的摄动元取值区间; 首班车在始发站的出发时刻不具备鲁棒性, 当第 4 列列车为快车时, 其越行后成为第 3 列列车, 该列车在越行站越行时刻不具备鲁棒性。

关键词 市域铁路; Max-plus 代数法; 快慢车

中图分类号 U292.4: U239.5

DOI: 10.16037/j.1007-869x.2023.09.001

Characteristics of Municipal Railway Express/Local Train Operation Based on Max-plus Algebra Method

ZHENG Xiang, XU Xingfang, LIU Wei, LU Yu

Abstract Objective: To develop operation plans for municipal railway express/local train mode and assess the robustness of the proposed scheme, targeting the characteristics of express/local train operation, a closed-loop model for municipal railway express/local train operation system based on Max-plus algebra method is proposed. Method: Treating the train operation system as a typical discrete event dynamic system, the model variables and parameters are defined along with system constraints. The above method is employed to establish the

open-loop linear model of the train operation system and to perform the transformation for the model under express/local train mode. The Max-plus algebra method is utilized to establish the train operation system Max-plus closed-loop linear model. A municipal railway with planned implementation of express/local train mode is taken as calculation example, the closed-loop model for which is established, and the evolution process of the output is analyzed and solved. Finally, a train timetable is generated through the solution of the state transition variable matrix. Result & Conclusion: The express/local train operation system in the calculation example is stable, with system buffer time of 291 seconds for one cycle. By analyzing the robustness under single-parameter perturbation condition, the perturbation element value range that maintains the operational equilibrium of express/local train operation system is obtained. The departure time of the first train from the originating station doesn't have robustness. When the 4th train is an express train and becomes the 3rd after overtaking the previous train, the overtaking time of this train at the overtaking station doesn't have robustness as well.

Key words municipal railway; Max-plus algebra method; express/local train

First-author's address Guangzhou Metro Design & Research Institute Co., Ltd., 510010, Guangzhou, China

市域铁路是连接市区与郊区、周围卫星城镇及都市圈的轨道交通线路, 具有运量大、速度快、站距长(设站少)等特点。采用高密度、周期化的快慢车运行模式可以减少乘客的出行时间, 满足多元化、快速化的出行需求。由于快慢车模式中采用快车越行、慢车避让的行车模式, 一旦出现晚点, 列车恢复运行的调整难度随之增大。这就要求列车运行图在计划阶段就能保证列车运行系统的鲁棒性, 提

* 通信作者

高列车运行图的抗干扰能力。文献[1]利用改进遗传算法优化城市轨道交通列车运行图的鲁棒性,但其未对快慢车行车模式进行研究。文献[2]提出2种可恢复鲁棒性的优化模型(RRT-1模型和RRT-2模型),在开行2种速度的客运专线上加以验证,分别研究鲁棒算法和鲁棒性代价,但其求解存在样本规模大、概率分布不明、NP-hard等不足之处。

Max-plus代数法可以在特定规则下实现矩阵运算,建立并求解具有一定运算规模的离散线性系统模型,目前已成功应用于系统制造、交通运输系统等领域。交通运输系统是典型的离散事件动态系统,目前Max-plus代数法已成功应用于铁路系统,将铁路运行的过程类比为串行生产线上工件依次顺序加工的过程。文献[3]基于Max-plus代数法的极大时间约束,研究轨道交通系统开环和闭环周期的运行规律。文献[4-5]通过极大代数框架评价了轨道交通系统及运行图的稳定性。由于快慢车模式中的快车在列车事件时序上会发生跃迁,现有的Max-plus列车运行系统闭环模型无法模拟快车越行、通过事件。基于此,本文提出一种基于Max-plus代数法的市域铁路快慢车运行系统的闭环模型,用状态变量的解生成满足运行方案需求的列车时刻表,并分析运行系统的稳态特性。本文研究可为市域铁路快慢车运行的计划编制和鲁棒性检验提供理论依据。

1 Max-plus 离散事件动态系统与列车运行过程

在Max-plus代数法结构中,变量的论域 $\bar{R} = R \cup \{-\infty\}$,为实数与负无穷的并集, \oplus 表示Max-plus加法,定义为取大运算, \otimes 表示Max-plus乘法,定义为取和运算。根据Max-plus乘法分配率, \otimes 优先级更高。定义零元素 $\varepsilon = -\infty$,单位元素 $e = 0$ 。Max-plus的详细运算规则可以参考文献[4-5]。

假设市域铁路上有 S_1, S_2, \dots, S_q 共 q 个车站,假设已确定列车开行方案,计划每周从 S_1 到 S_q 站开行 m 列车,表示为 P_1, P_2, \dots, P_m 。任一列车 $P_i (i=1, 2, \dots, m)$ 在每个非首末站均包含到达和出发两个事件,始发站仅有出发事件,终点站仅有到达事件。为了表述列车在车站的到发作业时刻,将列车在每一站 $S_j (j=1, 2, \dots, q)$ 发生的事件一一对应,共建立 $2q-2$ 个车站作业点,为标注方便,重新

编号车站作业点为 W_1, W_2, \dots, W_n ,其中 $n=2q-2$ 。车站、列车事件与车站作业点之间的映射关系如图1所示。

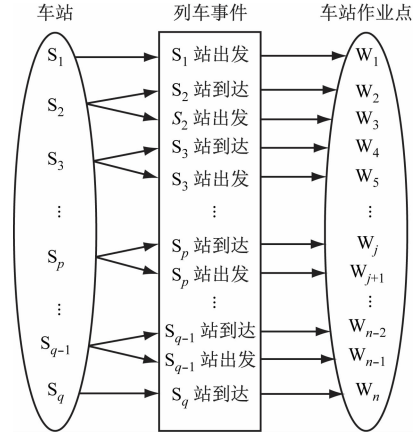


图1 车站、列车事件与车站作业点之间的映射关系

Fig. 1 Mapping relationship between station, train event and station operation point

1.1 定义模型变量和参数

假设只存在 S_1-S_q 站单一交路,车底充足,不考虑车底衔接。线路运行方案已知,即列车在区间和站点的作业时间、列车追踪间隔等均为已知参数,利用Max-plus代数法描述满足运行方案条件下的列车运行全过程,记录每一列列车运行状态迁移,求解列车到发事件发生时刻。

1) 状态变量 x_{ij} 。记录列车 P_i 运行状态跃迁至车站作业点 W_j 的时刻,即列车 P_i 在始发车站 S_1 的发车时刻(作业点位置为 W_1)记为 x_{i1} ;以此类推,在第 p 个车站 S_p 的到达时刻(作业点位置为 W_j)记为 x_{ij} ,出发时刻(作业点位置为 W_{j+1})记为 $x_{i,j+1}$,在终点站 S_q 的到达时刻(作业点位置为 W_n)记为 x_{in} 。

2) 输入变量 u_i 。记录每列列车计划在始发站 S_1 的发车时刻。

3) 输出变量 y_i 。记录每列列车在终点站 S_q 完成停站作业的时刻。

4) 作业时间 t_{ij} 。列车 P_i 的运行状态从一站作业点跃迁至另一站作业点所需时间。例如:列车 P_i 在车站作业点 W_1 的作业时间,表示列车 P_i 从 S_1 站出发至 S_2 站的区间运行时间,记为 t_{i1} ;列车 P_i 在车站作业点 W_2 的作业时间,表示列车 P_i 从到达 S_2 站至由 S_2 站出发所需时间,即列车 P_i 在 S_2 站的停站作业时长,记为 t_{i2} 。在实际问题求解中,区间运行时间不为0,停站作业时长可为0(表示列车在该站越行,不停车通过)。

5) 追踪间隔时间 z_{ij} 。列车 P_i 在车站作业点 W_j 与下一列车 P_{i+1} 之间的追踪间隔时间。

6) 周期 T 和批次 k 。设定若干列车为一个列车群,在一个批次内从始发站间隔发车,此后列车运行计划按批次重复循环,列车开行复现时间间隔称为一个周期 T 。 k 表示第 k 批次。模型参数周期与批次示意图如图 2 所示。

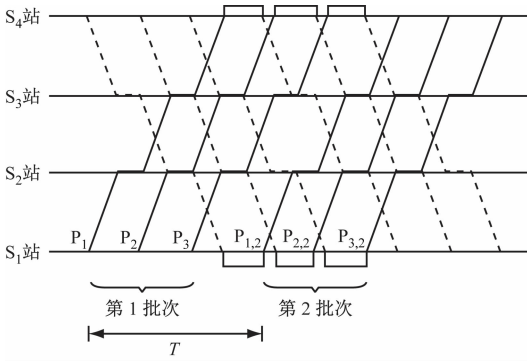


图2 模型参数周期与批次示意图

Fig. 2 Diagram of model parameter period T and batch number k

1.2 系统约束规则

1) 首班车 P_1 状态。始发站出发时刻受初始既定时刻的约束;在非始发站首班车的到发时刻受自身接续规则的约束。Max-plus 代数形式可以分别表示为:

$$x_{11}(k) = \max\{u_1\} = 0 \otimes u_1(k) \quad (1)$$

$$x_{1j}(k) = x_{1,j-1}(k) \otimes t_{1,j-1} \quad (2)$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

式中:

$x_{11}(k)$ 、 $x_{1,j-1}(k)$ 、 $x_{1j}(k)$ ——在第 k 批次中,首班车 P_1 运行状态分别跃迁至车站作业点 W_1 、 W_{j-1} 、 W_j 的时刻;

$u_1(k)$ ——在第 k 批次中,首班车 P_1 计划在始发站 S_1 的发车时刻,数值上等于 $x_{11}(k)$;

$t_{1,j-1}$ ——首班车 P_1 从作业点 W_{j-1} 跃迁至作业点 W_j 所需时间。

2) 非首班列车 $P_i (i \neq 1)$ 状态。始发站出发时刻受初始既定时刻和列车追踪间隔时间的约束;非始发站首班车到发时刻受自身接续规则和列车追踪间隔时间的约束。Max-plus 代数形式可以分别表示为:

$$x_{i1}(k) = \max\{u_i, x_{i-1,1}(k) + z_{i-1,1}\} = 0 \otimes u_i(k) \oplus x_{i-1,1}(k) \otimes z_{i-1,1} \quad (3)$$

$$i \neq 1$$

$$x_{ij}(k) = x_{i-1,j}(k) \otimes z_{i-1,j} \oplus x_{i,(j-1)}(k) \otimes t_{i,(j-1)} \quad (4)$$

$$i \neq 1, j = 2, 3, \dots, n$$

式中:

$x_{i1}(k)$ 、 $x_{i,j-1}(k)$ 、 $x_{ij}(k)$ ——在第 k 批次中,列车 P_i 运行状态分别跃迁至车站作业点 W_1 、 W_{j-1} 、 W_j 的时刻;

$x_{i-1,1}(k)$ 、 $x_{i-1,j}(k)$ ——在第 k 批次中,列车 P_i 的前列车 P_{i-1} 运行状态跃迁至车站作业点 W_1 、 W_j 的时刻;

$u_i(k)$ ——在第 k 批次中,列车 P_i 计划在始发站 S_1 的发车时刻;

$t_{i,j-1}$ ——列车 P_i 从作业点 W_{j-1} 跃迁至作业点 W_j 所需时间;

$z_{i-1,1}$ 、 $z_{i-1,j}$ ——列车 P_i 的前列车 P_{i-1} 分别在车站作业点 W_1 、 W_j 时与列车 P_i 之间的追踪间隔时间。

3) 输出条件 y_i 。 $y_1 \sim y_m$ 表征在一个周期内,第 $i (i = 1, 2, \dots, m)$ 列列车在终点站完成停站作业的时刻,可以表示为:

$$y_i(k) = x_{in}(k) \otimes t_{in} \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

式中:

$y_i(k)$ ——在第 k 批次中,列车 P_i 在终点站完成停站作业的时刻;

$x_{in}(k)$ ——在第 k 批次中,列车 P_i 运行状态分别跃迁至终点站作业点 W_n 的时刻;

t_{in} ——列车 P_i 在终点站作业点 W_n 的停站作业时间。

2 基于 Max-plus 代数法的列车时刻表编制模型

2.1 列车运行系统 Max-plus 开环线性模型

首先,基于 Max-plus 代数法建立站站停运行模型。列车 P_1, P_2, \dots, P_m 按间隔时间依次发车,每列列车依次通过每个车站,并依次到达终点站完成一个周期的运行过程,期间前后接续列车次序保持固有顺序。站站停列车运行计时事件图如图 3 所示。

以式(3)为例,Max-plus 代数法的主要优点为可以通过极大加代数运算将逻辑型非线性方程线性化。基于上述系统变量间的时间关系和式(1)~(5)给出的逻辑规则,用 Max-plus 代数语言描述每

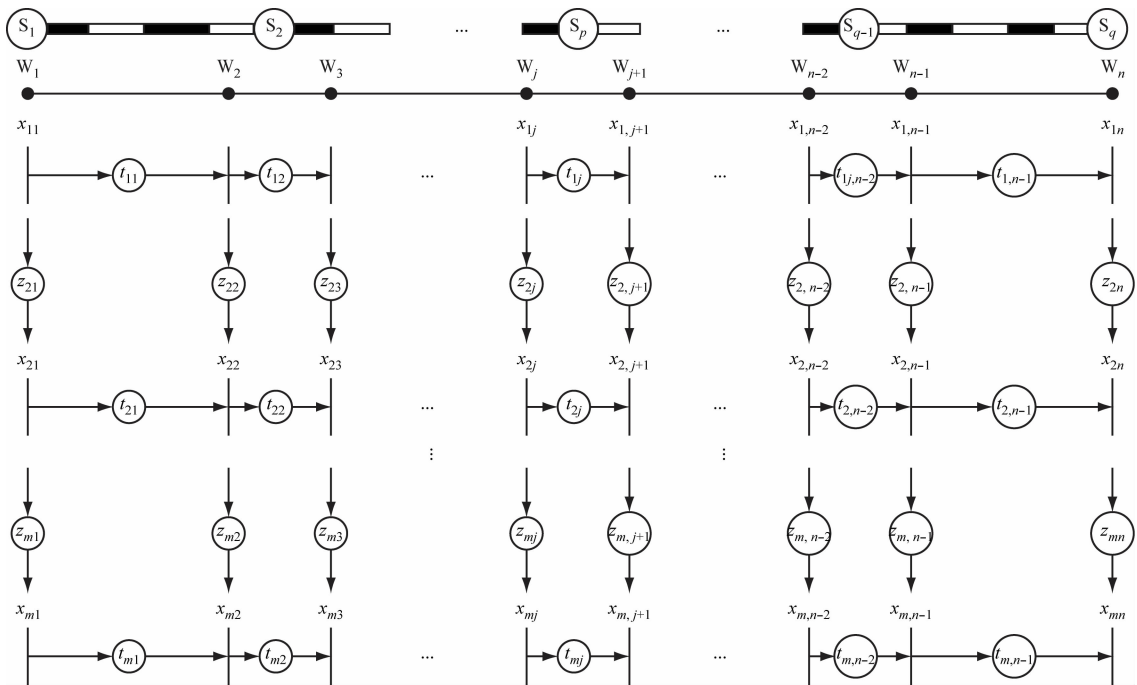


图3 站站停列车运行计时事件图

Fig. 3 Timing event diagram of local train operation

个列车事件发生时所对应的状态转移方程,并引入矩阵表示。开环模型为单批次运行过程,即 $k=1$ 。输入变量的向量形式为 $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]^T$; 状态变量的向量形式为 $\mathbf{x} = [x_{11} \ x_{12} \ \cdots \ x_{1n} \ x_{21} \ x_{22} \ \cdots \ x_{2n} \ \cdots \ x_{m1} \ x_{m2} \ \cdots \ x_{mn}]^T$, $\dim(\mathbf{x}) = mn$; 输出变量的向量形式为 $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]^T$, $\dim(\mathbf{u}) = \dim(\mathbf{y}) = m$ 。构建与系统矩阵 \mathbf{A} ($\mathbf{A} \in \bar{R}_{mn \times mn}$)、输入矩阵 \mathbf{B} ($\mathbf{B} \in \bar{R}_{mn \times m}$)、输出矩阵 \mathbf{C} ($\mathbf{C} \in \bar{R}_{m \times mn}$) 相对应的模型:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{I}_2 & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbf{I}_m & \mathbf{J}_m \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon & & & \\ t_{i1} & \varepsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & t_{i,n-1} & \varepsilon \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

$$\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} z_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & z_{in} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & \cdots & & \\ & & 0 & \varepsilon & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & \varepsilon & \cdots \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \cdots & t_{1n} & & \\ & \varepsilon & \cdots & t_{2n} & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中:

\mathbf{J}_i ——自身接续约束矩阵(未标注的元均为 ε 元),非零元记录第 i ($i=1, 2, \dots, m$) 列列车依次在第 $1, 2, \dots, n-1$ 个车站作业点的作业时长;

\mathbf{I}_i ——列车追踪间隔约束矩阵(未标注的元均为 ε 元),非零元记录第 i ($i=1, 2, \dots, m$) 列列车依次在第 $1, 2, \dots, n-1$ 个车站追踪列车的发车间隔时间 $z_{i1}, z_{i3}, \dots, z_{i,n-1}$, 以及追踪列车的到达间隔时间 $z_{i2}, z_{i4}, \dots, z_{in}$ 。

由于同一区间列车的运行时间相同,且同一车站的停站时长相同,则有 $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \cdots = \mathbf{J}_m$, $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = \cdots = \mathbf{I}_m$ 。 \mathbf{B} 中无标注的元均为 ε 元,矩阵 \mathbf{B} 中的单位元素分布在第 1 行和第 n 的整数倍 + 1 行。 \mathbf{C} 中无标注的元均为 ε 元,矩阵 \mathbf{C} 中的非零元分布

在第 n 的整数倍列。

对于式(6),在表达式两端逐次左圈乘矩阵 E , $A, A^2, \dots, A^{p-2}, A^{p-1}$, 再将各方程迭代相加可推导出:

$$x(k) = A^* Bu(k) \quad (13)$$

$$A^* = E \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots \oplus A^{p-1} \quad (14)$$

代入式(7),输出解表达式为:

$$y(k) = CA^* Bu(k) \quad (15)$$

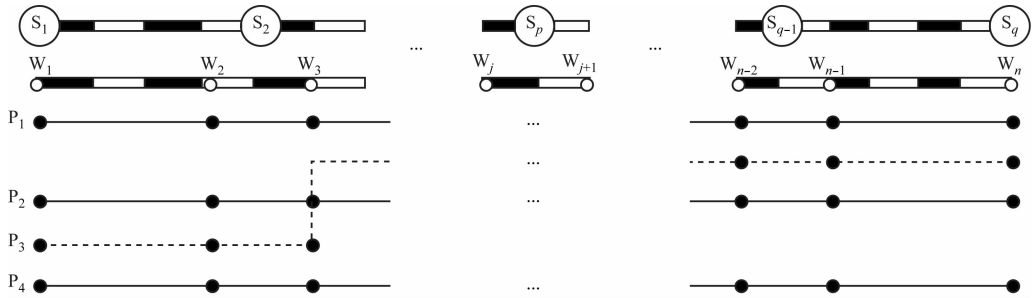


图4 列车 P_3 在车站 S_2 越行前后的方案示意图

Fig. 4 Diagram of the plan before and after train P_3 overtaking at station S_2

快车 P_3 在 S_2 站办理通过作业,即停站时长为0,在系统状态矩阵中表示为 $t_{32} = 0 < t_{22} = t_{42}$ 。同时,由于快车在 S_2 站降速通过、不用完全制动,因此在 S_2 站前后相邻的两个区间内,快车的运行速度高于慢车,则快车在 S_2 站前后两区间的运行时间 $t_{31} < t_{21} = t_{41}, t_{33} < t_{23} = t_{43}$ 。

在列车运行开环线性模型中(见图4),越行不会改变列车自身的接续约束,即自身接续约束矩阵 J_i 无变化。越行会对快车 P_3 、越行前列列车 P_2 和越行后的列车 P_4 这3列列车在越行后的次序有所影响,即3列列车在车站作业点 W_3, W_4, \dots, W_n 的状态方程都将发生改变。

以3列列车在车站作业点 W_3 的状态方程变换为例:

$$\begin{cases} \text{越行前:} \begin{cases} x_{23} = t_{22} \otimes x_{22} \oplus z_{13} \otimes x_{13} \\ x_{33} = t_{32} \otimes x_{32} \oplus z_{23} \otimes x_{23} \\ x_{43} = t_{42} \otimes x_{42} \oplus z_{33} \otimes x_{33} \end{cases} \\ \text{越行后:} \begin{cases} x_{23} = t_{22} \otimes x_{22} \oplus z_{33} \otimes x_{33} \\ x_{33} = t_{32} \otimes x_{32} \oplus z_{13} \otimes x_{13} \\ x_{43} = t_{42} \otimes x_{42} \oplus z_{23} \otimes x_{23} \end{cases} \end{cases}$$

以越行站的出站作业点 W_3 为分界点,将分块矩阵 $I_i (i=2,3,4)$ 拆分为 I'_i 和 I''_i ,则有:

$$I_i = I'_i \oplus I''_i \quad (16)$$

2.2 快慢车模式下开环线性模型的变换

快慢车模式下,由于存在快车越行慢车,运行图编制的特点在于考虑列车停站分布和运行顺序变换,在列车运行系统线性模型中,这两者对应于系统状态矩阵参数的重新赋值与排序。假设开行1列快车 P_3 ,且设定在 S_2 站越行。列车 P_3 在车站 S_2 越行前后的方案示意图如图4所示。

$$I'_i = \begin{bmatrix} z_{i1} & & & \\ & z_{i2} & & \\ & & \varepsilon & \\ & & & \ddots \\ & & & & \varepsilon \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$I''_i = \begin{bmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & z_{i3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & z_{in} \end{bmatrix} \quad (18)$$

在系统矩阵 A 中,状态方程的改变可对应为相应列车追踪约束矩阵 I'_2, I'_3, I'_4 的横向移动。在作业点 W_3 完成越行后,列车 P_2 的前列列车由 P_1 变换为 P_3 ,即 I_2 中对应位置的 I'_2 向右移动 $2n$ 列;列车 P_3 的前列列车由 P_2 变换为 P_1 ,即 I_3 中对应位置的 I'_3 向左移动 n 列;列车 P_4 的前列列车由 P_3 变换为 P_2 ,即 I_4 中对应位置的 I'_4 向左移动 n 列。快慢车模式下的系统矩阵 A 变换为:

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ I'_2 & J_2 & I''_2 & & \\ I'_3 & I'_3 & J_3 & & \\ & I''_4 & I'_4 & J_4 & \\ & & & I_5 & J_5 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & I_m & J_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

除了 A 的矩阵元素位置转移外, z_{13} 、 z_{23} 的取值也发生了变动。站站停模式下, z_{13} 、 z_{23} 均表示 S_2 站追踪列车发车间隔时间, 即 $z_{13} = z_{23}$; 慢车模式下, z_{13} 、 z_{23} 表示 S_2 站列车同向通发(通过和发车)、发通(发车和通过)追踪间隔时间。 B 、 C 与其他变量矩阵均不做状态置换。

2.3 列车运行系统 Max-plus 闭环线性模型

编制规律性的列车运行计划有利于提高乘客的出行选择黏性。为使系统形成周期性运行节奏, 建立列车运行系统闭环模型。引入反馈方程, 即 $U(k) = K \otimes Y(k-1)$, K 为 $m \times m$ 的常数矩阵, 其元素 $k_{i,j}$ 满足以下关系式:

$$k_{i,j} = \begin{cases} \varepsilon, & i \neq j \\ K_i, & i = j \end{cases} \quad (20)$$
$$i, j = 1, 2, \dots, m$$

式中:

表 1 案例区段各车站及区间时间参数

Tab.1 Time parameters of each station and interval in the example section									
车站	停站时长/s		同向追踪间隔时间/s					上行运行时间/s	
	慢车	快车	$z_{\text{到到}}$	$z_{\text{到通}}$	$z_{\text{通到}}$	$z_{\text{发通}}$	$z_{\text{通发}}$	慢车	快车
S_1			140	0	0	0	0	242	207
S_2	35	0	140	90	0	120	30	229	188
S_3	70	70	140	0	0	0	0	129	129
S_4	35	35	140	0	0	0	0		

注:追踪间隔时间表示自动闭塞区段同一方向追踪运行的两列车间的最小间隔区间; $z_{\text{到到}}$ 、 $z_{\text{到通}}$ 、 $z_{\text{通到}}$ 、 $z_{\text{发通}}$ 、 $z_{\text{通发}}$ 分别表示前后两列车到达、出发、通过不同组合时的追踪间隔时间。

利用 Max-plus 代数法建立快慢车运行上行方向闭环模型。

输入系统的初始取值为: $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T = [0 \ 140 \ 600 \ 740]^T$, 表示每列车在 S_1 站的发车时刻。

服务时间矩阵 F 取值为:

$$F = \begin{bmatrix} 242 & 35 & 229 & 70 & 129 & 35 \\ 207 & 0 & 188 & 70 & 129 & 35 \\ 242 & 35 & 229 & 70 & 129 & 35 \\ 207 & 0 & 188 & 70 & 129 & 35 \end{bmatrix}$$

反馈矩阵 K 中的反馈元素 K_i 取 0, 构建闭环模型。闭环系统输出矩阵 M 为:

$$M = \begin{bmatrix} 909 & 769 & \varepsilon & \varepsilon \\ 769 & 629 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1\ 189 & 1\ 049 & 909 & 769 \\ 1\ 049 & 909 & 769 & 629 \end{bmatrix}$$

K_i ——反馈常数, 表示批次间的列车发车间隔约束。

列车运行系统的闭环线性模型为:

$$y(k) = My(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, N^+ \quad (21)$$

$$x(k) = Nx(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, N^+ \quad (22)$$

$$M = CA^*BK \quad (23)$$

$$N = A^*BKC \quad (24)$$

3 算例分析

3.1 市域铁路快慢车闭环模型输出演化

假设某市域铁路上的 4 个车站 S_1 — S_4 , 其中车站 S_2 具备越行条件。已知运行方案为: 计划每 20 min(列车计划运行周期 $T = 1\ 200$ s) 周期在上行方向($S_1 \rightarrow S_4$) 开行同一批次的 4 列列车 P_1 — P_4 , 慢车和快车以 1:1 间隔开行, 快车在 S_2 站越行。案例区段各车站及区间时间参数如表 1 所示。

累计计算 6 个周期(合计 2 h), 列车在 S_4 终点站完成停站作业的输出时刻 $y(k)$ 如表 2 所示。

表 2 列车在 S_4 终点站完成停站作业的输出时刻
Tab.2 Output time $y(k)$ of train stopping at terminal station S_4

列车	输出时刻/s					
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$
P_1	909	2 109	3 309	4 509	5 709	6 909
P_2	769	1 969	3 169	4 369	5 569	6 769
P_3	1 509	2 709	3 909	5 109	6 309	7 509
P_4	1 369	2 569	3 769	4 969	6 169	7 369

该快慢车运行系统特征值 λ 为慢车运行一周所花费的时间, 即 $\lambda = 909$ s。系统列车计划运行周期 T 为 1 200 s, 因此一个周期系统的缓冲时间为:

$$\Delta = T - \lambda = 291 \text{ s}$$

缓冲时间大于0,表示系统稳定。此外,还可通过 $\mathbf{x}(k)$ 得到对应的列车时刻表。假设首班车7:00

从 S_1 站发车,前3个批次列车在各站的到发时刻信息如表3所示。

表3 前3个批次列车在各站的到发时刻信息
Tab.3 Train arrival and departure timetable at each station for the first three batches

k	列车	S_1 站 发车时刻	S_2 站 通过时刻	S_2 站 到达时刻	S_2 站 发车时刻	S_3 站 到达时刻	S_3 站 发车时刻	S_4 站 到达时刻
1	P_1	07:00:00		07:04:02	07:06:17	07:11:15	07:12:25	07:14:34
	P_2	07:02:20	07:05:47			07:08:55	07:10:05	07:12:14
	P_3	07:10:00		07:14:02	07:16:17	07:21:15	07:22:25	07:24:34
	P_4	07:12:20	07:15:47			07:18:55	07:20:05	07:22:14
2	P_1	07:20:00		07:24:02	07:26:17	07:31:15	07:32:25	07:34:34
	P_2	07:22:20	07:25:47			07:28:55	07:30:05	07:32:14
	P_3	07:30:00		07:34:02	07:36:17	07:41:15	07:42:25	07:44:34
	P_4	07:32:20	07:35:47			07:38:55	07:40:05	07:42:14
3	P_1	07:40:00		07:44:02	07:46:17	07:51:15	07:52:25	07:54:34
	P_2	07:42:20	07:45:47			07:48:55	07:50:05	07:52:14
	P_3	07:50:00		07:54:02	07:56:17	08:01:15	08:02:25	08:04:34
	P_4	07:52:20	07:55:47			07:58:55	08:00:05	08:02:14

3.2 单参数摄动情形的鲁棒性分析

假设闭环线性系统的系统矩阵 \mathbf{M} 中,包含且仅包含一个可摄动元 $m_{ij} \neq \varepsilon$,且其摄动为增性的(增性摄动 $\Delta m_{ij} = \bar{m}_{ij} - m_{ij} > 0$), λ 和 m_{ij} 为 \mathbf{M} 的标称特征值和标称元, $\bar{\lambda}$ 和 \bar{m}_{ij} 为摄动特征值和摄动元,再定义标量 m_{ij}^+ 表示摄动区间的上限, m_{ij}^+ 构成的增性摄动上限矩阵用 \mathbf{M}^+ 表示。摄动区间的上限可以表示为:

$$m_{ij}^+ = \begin{cases} \lambda, & i = j \\ \min_{1 \leq k \leq q-1} \{ (k+1)\lambda - (M^k)_{ij} \}, & i \neq j \end{cases}$$

则系统稳态参量(特征值) λ 对于元 m_{ij} 的增性摄动是鲁棒的。通过常用的准则来定量刻画稳态参量 λ 相对于系统矩阵各元素 m_{ij} 的鲁棒性,定义鲁棒性准则 $R_F(m_{ij})$ 和 $R_M(m_{ij})$ 分别为^[4]:

$$R_F(m_{ij}) = (\bar{\lambda} - \lambda) / (\bar{m}_{ij} - m_{ij}) \quad (25)$$

$$R_M(m_{ij}) = |(m_{ij}^+ - m_{ij}) / m_{ij}| \quad (26)$$

考察鲁棒性准则 $R_F(m_{ij})$ 和 $R_M(m_{ij})$ (符号“-”表示该位置不属于摄动元),则有:

$$\mathbf{M}^+ = \begin{bmatrix} 909 & 1\,049 & 629 & 769 \\ 1\,049 & 909 & 769 & 909 \\ 1\,471 & 1\,611 & 909 & 1\,049 \\ 1\,611 & 1\,751 & 1\,049 & 909 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{R}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0.36 & - & - \\ 0.36 & 0.45 & - & - \\ 0.24 & 0.54 & 0 & 0.36 \\ 0.54 & 0.93 & 0.36 & 0.45 \end{bmatrix} \quad (28)$$

对于所有可能的摄动元 $\bar{m}_{ij} \in [m_{ij}, m_{ij}^+]$,系统均具有鲁棒性, $R_F(m_{ij})$ 函数均成立, $R_F(m_{ij}) = (\bar{\lambda} - \lambda) / (\bar{m}_{ij} - m_{ij}) \equiv 0$ 。例如: $R_F(\bar{m}_{12}) \in [769, 1\,049]$, $R_F(\bar{m}_{22}) \in [629, 909]$, $R_F(\bar{m}_{31}) \in [1\,189, 1\,471]$, $R_F(\bar{m}_{32}) \in [1\,049, 1\,611]$ 。当某一个时间参数取值在上述区间内、其他参数保持不变的情况下,该快慢车运行系统仍然保持运行的一致均衡性,而当摄动元超过摄动范围时,系统就会出现扰动,即后续列车运行时刻发生变动。

考察鲁棒性准则 $R_M(m_{ij})$,若 $R_M(m_{ij}) = 0$,则 λ 对于 $R_M(m_{ij})$ 是非鲁棒的。前文案例中, $R_M(m_{11}) = R_M(m_{33}) = 0$,即首班车在始发站出发时刻不具备鲁棒性,第4列列车为快车,越行后成为第3列列车,在越行站越行时刻不具备鲁棒性;若 $R_M(m_{ij}) \neq 0$,则 λ 对于 $R_M(m_{ij})$ 是鲁棒的,且 $R_M(m_{ij})$ 的值越大,鲁棒性程度越高。

4 结语

编制快慢车运行计划时,应满足系统稳定性和
(下转第14页)

先模式对有轨电车区间旅行时间的影响,构建了恶劣天气下有轨电车运行调整混合整数非线性规划模型。基于混合整数规划理论,将模型的非线性项进行重构,获得了混合整数规划模型。本文所构建的模型与算法可以嵌入有轨电车智能化调度指挥系统中,为恶劣天气下的有轨电车自动调整提供理论及技术基础。

以丽江有轨电车 1 号线的线路数据为例进行实例分析。由模型求解结果可知,所提模型及算法可以求解不同恶劣天气下有轨电车的调整时刻表。此外,本文对不同临时限速条件、不同交叉口优先模式的优化结果进行了对比,获得以下结论:

1) 当临时限速值一定时,总偏离时间随着限速持续时间的增加而增加(基于本文案例数据,增加时间为 0 ~ 24 095 s)。

2) 当限速持续时间一致时,总偏离时间随着临时限速值的减小而增大(基于本文案例数据,增加时间为 4 028 ~ 74 733 s)。

3) 在不同程度的恶劣天气下,绝对优先模式与相对优先模式对总偏离时间的降低程度不一致。总体来看,绝对优先模式可以降低 15% ~ 87% 的总偏离时间,但恶劣天气越严重(临时限速值越低)

(上接第 7 页)

鲁棒性的要求。为考察快慢车方案的系统稳态特征,本文针对市域铁路快慢车运行特点,基于 Max-plus 代数法构建市域铁路快慢车运行系统闭环模型。以一段计划开行快慢车的市域铁路为例,从变量输入到系统输出演化求解了列车运行动态转移的全过程,并通过状态转移变量矩阵的求解结果生成列车运行时刻表,分析该系统的稳定性和鲁棒性,实现了 Max-plus 代数法在市域铁路快慢车运行系统上的应用,为快慢车运行计划编制和系统鲁棒性分析提供了一种新的分析模型。目前,所提 Max-plus 代数法模型仅限于在满足已知运行方案要素条件下生成快慢车运行时刻表和系统稳态特性评价,下一步还可深入分析 Max-plus 代数法在快慢车系统鲁棒性优化和列车运行调整方面的研究。

参考文献

- [1] 曹志超,袁振洲,李得伟,等.城市轨道交通列车运行图鲁棒性优化模型[J].中国铁道科学,2017,38(3):130.
CAO Zhichao, YUAN Zhenzhou, LI Dewei, et al. Robust optimization model for train working diagram of urban rail transit[J].

时,绝对优先模式的优势呈下降趋势。

参考文献

- [1] 滕飞.城市轨道交通列车运行调整策略研究[J].现代城市轨道交通,2022(11):75.
TENG Fei. Research on train operation regulation strategy of urban rail transit[J]. Modern Urban Transit, 2022(11):75.
- [2] 张海雷,屈龙,崔姗姗.基于随机性特征与组合仿真模型的有轨电车运行指标分析方法[J].城市轨道交通研究,2022,25(12):152.
ZHANG Hailei, QU Long, CUI Shanshan. Tram operation indicator analysis method based on randomness feature and combined simulation model[J]. Urban Mass Transit, 2022, 25(12):152.
- [3] 何利英.有轨电车旅行速度影响因素分析及提升实践[J].城市轨道交通研究,2022,25(9):208.
HE Liying. Influencing factor analysis and improvement practice of tramway travel speed [J]. Urban Mass Transit, 2022, 25(9):208.
- [4] 刘宏祥,赵晓峰.严寒地区有轨电车冬季运行保障研究[J].城市轨道交通研究,2022,25(增刊1):74.
LIU Hongxiang, ZHAO Xiaofeng. Tram winter operation safeguard in severe cold areas [J]. Urban Mass Transit, 2022, 25(S1):74.

(收稿日期:2023-04-07)

- [1] China Railway Science, 2017, 38(3):130.
- [2] 刘敏,韩宝明.列车运行图可恢复鲁棒性优化模型[J].铁道学报,2013,35(10):1.
LIU Min, HAN Baoming. Recoverable robust timetabling models for railways[J]. Journal of the China Railway Society, 2013, 35(10):1.
- [3] 王彩璐,陶跃钢,李志军,等.具有极大时间约束的轨道交通系统的周期分析[J].控制理论与应用,2017,34(10):1380.
WANG Cailu, TAO Yuegang, LI Zhijun, et al. Periodic analysis for railway transport systems with maximum timing constraints[J]. Control Theory & Applications, 2017, 34(10):1380.
- [4] 韩云祥,黄晓琼.基于极大代数理论的交通系统稳态性能分析[J].交通运输系统工程与信息,2016,16(3):126.
HAN Yunxiang, HUANG Xiaorong. Analysis of the steady state performance of traffic system based on max-plus theory[J]. Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology, 2016, 16(3):126.
- [5] 瞿驰.基于延迟调整性能的地铁运行图综合质量评估方法[D].北京:北京交通大学,2015.
QU Chi. Synthetic evaluating method for subway operating diagram based on delay adjusting performance[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2015.

(收稿日期:2021-04-05)