

基于 LuGre 模型的城市轨道交通列车盘形制动系统 摩擦振动稳定性研究*

方浩^{1,2} 王金海^{1,2} 杨建伟^{1,2} 李继山^{3,4} 赵鹏⁴ 王璇^{1,2}

(1. 北京建筑大学机电与车辆工程学院, 102616, 北京; 2. 北京建筑大学城市轨道交通车辆服役性能保障北京市重点实验室, 100044, 北京; 3. 中国铁道科学研究院集团有限公司机车车辆研究所, 100081, 北京; 4. 北京纵横机电科技有限公司, 100094, 北京)

摘要 [目的]城市轨道交通列车盘形制动摩擦复杂多变,传统的静态摩擦模型难以揭示制动系统的动态特性,有必要建立动态摩擦模型分析盘形制动系统动力学特性。[方法]利用 LuGre 动态摩擦模型建立盘形制动系统二自由度动力学方程,采用数值分析的方法求解,获得闸片在不同情况下的振动响应,分析角速度、制动压力和摩擦因数差值对制动系统稳定性的影响。[结果及结论]随着制动角速度的增加,制动系统逐渐从黏滑振动转变为稳定振动,高于临界角速度时制动系统振幅增加,制动系统进入稳定状态所需的时间增加;制动压力增大,闸片从稳定运动向黏滑运动过渡,振动变得复杂且不规律。随着制动压力的增加,闸片的振幅逐渐增加,振动强度越来越大;摩擦因数差值的增加会增大振幅。经综合考虑,摩擦因数差值为 0.2 时,制动系统处于最佳稳定状态。

关键词 城市轨道交通列车; 盘形制动系统; 稳定性; 黏滑振动; LuGre 模型

中图分类号 U270.35

DOI:10.16037/j.1007-869x.2025.04.004

Stability Study of Friction Vibration for Urban Rail Transit Train Disc Braking System Based on LuGre Model

FANG Hao^{1,2}, WANG Jinhai^{1,2}, YANG Jianwei^{1,2}, LI Jishan^{3,4}, ZHAO Peng⁴, WANG Xuan^{1,2}

(1. School of Electromechanical and Vehicle Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, 102616, Beijing, China; 2. Beijing Key Laboratory of Service Performance Guarantee for Urban Railway Vehicles, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, 100044, Beijing, China; 3. Locomotive and Car Research Institute, China Academy of Railway Sciences Group Co., Ltd., 100081, Beijing, China; 4. Beijing Zongheng Electromechanical Technology Corporation, 100094, Beijing, China)

cal Technology Corporation, 100094, Beijing, China)

Abstract [Objective] The complexity and variability of friction in urban rail transit train disc brakes make it challenging for traditional static friction models to reveal the dynamic characteristics of the braking system. It is necessary to establish a dynamic friction model to analyze the dynamic characteristics of the disc brake system. [Method] Using the LuGre dynamic friction model, a two-degree-of-freedom dynamic equation for the disc brake system is established and solved by numerical analysis. The vibration response of the brake pad under different conditions is obtained, and the influence of the angular velocity, brake pressure and friction factor difference on the brake system stability is analyzed. [Result & Conclusion] With the increase of braking angular velocity, the brake system gradually changes from stick-slip vibration to stable vibration. When the angular velocity is higher than the critical angular velocity, the brake system amplitude increases, and the time required for the brake system to enter into the stable state also increases; as the braking pressure increases, the brake pad transitions from stable motion to stick-slip motion, and the vibration becomes complex and irregular. With the increase of braking pressure, the amplitude of the brake pad gradually increases, and the vibration intensity gets greater and greater; the amplitude increases with an increase in the friction coefficient difference. Upon comprehensive analysis, the brake system achieves optimal stability state at a friction coefficient difference of 0.2.

Key words Upon urban rail transit trains; disc brake system; stability; viscoslip vibration; LuGre model

盘形制动器是城市轨道交通列车的重要组成部分。若发生不稳定现象,会产生强烈的振动,降

* 中国城市轨道交通协会科研专项 (CAMET-KY-2022038); 北京市自然科学基金项目 (L231016); 北京建筑大学研究生创新项目 (PG2024145)

低列车的制动性能,存在极大的安全隐患。此外,振动产生的噪声还会影响乘客乘坐的舒适性,因此,对盘形制动系统进行制动稳定性分析至关重要。

文献[1]通过有限元法提出了摩擦振动噪声产生机理。文献[2]基于 Coulomb 模型研究发现,阻尼对于制动系统的稳定性同样重要。文献[3]基于 Stribeck 模型试验表明,摩擦半径的变化会影响摩擦系统的黏滑振动特性。文献[4]利用 Stribeck 模型建立制动盘扭转及摆动运动的动力学模型,研究了径向刚度对制动系统的影响。文献[5]研究了汽车制动系统低速制动时的分岔与混沌行为。文献[6]利用 LuGre 模型研究了船用螺旋桨的摩擦诱导振荡特性。

本文从闸片切向运动和制动盘扭转运动角度出发,基于 LuGre 模型建立二自由度动力学方程,研究角速度、制动压力及摩擦因数差值对制动系统稳定性的影响,以期降低城市轨道交通列车盘形制动系统振动引起的稳定性问题提供理论支持。

1 盘形制动系统动力学建模

1.1 LuGre 模型

LuGre 模型基本思想是:将两个相互接触的物体表面在微观形态下看成是由一定数量的弹性鬃毛组成,并将鬃毛的平均挠度定义为 z ,当物体接触时,鬃毛相互摩擦,模拟黏着滑动摩擦现象,如图 1 所示。

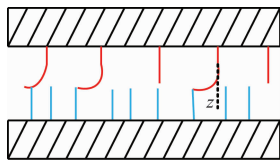


图 1 LuGre 模型

Fig. 1 LuGre model

LuGre 模型是一种动态摩擦模型,考虑了接触面的迟滞效应,比静态摩擦模型具有更高的精度,更能反映出物体间摩擦的真实情况。模型表达式为:

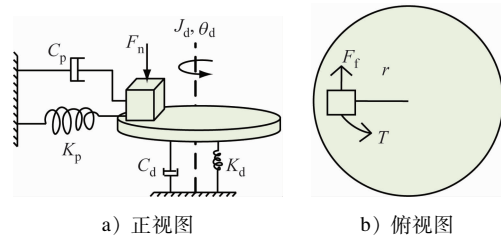
$$\begin{cases} F_n = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v_r \\ \frac{dz}{dt} = v_r [1 - \sigma_0 z / G(v_r)] \\ G(v_r) = F_n \{ \mu_k + (\mu_s - \mu_k) \exp[-(v_r / v_s)^2] \} \\ F_c = \mu_s F_n \\ F_s = \mu_k F_n \end{cases} \quad (1)$$

式中:

- σ_0 ——鬃毛的刚度系数;
- σ_1 ——鬃毛内部阻尼系数;
- σ_2 ——鬃毛黏性阻尼系数;
- v_r ——接触面的相对速度;
- v_s ——LuGre 模型的 Stribeck 指数;
- $G(v_r)$ ——自变量为 v_r 的 Stribeck 函数;
- F_n ——制动压力;
- t ——时间;
- μ_k ——动摩擦因数;
- μ_s ——静摩擦因数;
- F_c ——摩擦副滑动摩擦力;
- F_s ——摩擦副最大静摩擦力。

1.2 二自由度盘形制动系统动力学模型

采用 LuGre 模型建立动力学方程,盘形制动系统模型如图 2 所示。



注: J_d —转动惯量; C_d —旋转阻尼; K_d —旋转刚度; C_p —闸片阻尼; K_p —闸片刚度; θ_d —制动盘扭转角位移; F_f —制动摩擦力; r —摩擦半径; T —摩擦扭矩。

图 2 盘形制动系统模型

Fig. 2 Model of disc brake system

为了便于计算,考虑稳态条件下的摩擦力,即: v_r 为正,且在滑动过程中假设 z 为恒定值。因此, $z = G(v_0) / \sigma_0$, $\dot{z} = 0$, $v_r = (\omega + \dot{\theta}_d) r - \dot{y}_p$, 其中, ω 为施加在制动盘上的恒定角速度, $G(v_0)$ 是自变量为稳态条件下接触面相对速度 v_0 的 Stribeck 函数,具体动力学方程为:

$$\begin{cases} J_d \ddot{\theta}_d + C_d \dot{\theta}_d + K_d \theta_d = T \\ m_p \ddot{y}_p + C_p \dot{y}_p + K_p y_p = F_f \end{cases} \quad (2)$$

式中:

- m_p ——闸片质量;
- y_p ——闸片的切向位移。

2 制动系统稳定性分析

基于线性系统稳定性分析理论,非线性系统通过在平衡点处的线性化雅可比矩阵来研究稳定性。

根据 Routh-Hurtiwz 判据可知:若系统在平衡点处的雅可比矩阵特征值实部为正,则系统不稳定,将会产生振动;反之,则系统稳定。

为研究制动系统的稳定性,令 $x_1 = \theta_d, x_2 = \dot{\theta}_d, x_3 = y_p, x_4 = \dot{y}_p$, 则式(2)转换为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{C_d}{J_d}x_2 - \frac{K_d}{J_d}x_1 - \frac{r(G(v_r) + \sigma_2 v_r)}{J_d} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{C_p}{m_p}x_4 - \frac{K_p}{m_p}x_3 + \frac{G(v_r) + \sigma_2 v_r}{m_p} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)的平衡点对应于一个稳定的相对滑动速度。令 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = 0$, 则得到制动系统的平衡点 $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}$, 对应的状态方程为:

$$\begin{cases} x_{10} = -\frac{r[G(v_0) + \sigma_2 v_0]}{K_d} \\ x_{20} = 0 \\ x_{30} = \frac{G(v_0) + \sigma_2 v_0}{K_p} \\ x_{40} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

对平衡点附近进行扰动,选取新变量 h , 令 $h = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4]^T = [x_1 - x_{10} \ x_2 - x_{20} \ x_3 - x_{30} \ x_4 - x_{40}]^T$ 。对式(4)进行泰勒展开,并且忽略高次项的影响,得到线性化的雅可比矩阵 J :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -K_d/J_d & J_{22} & 0 & J_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & J_{42} & -K_p/m_p & J_{44} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中:

$$J_{22} = -C_d/J_d - r\{2F_n(\mu_k - \mu_s) \exp[-(v_0/v_s)^2] \cdot \omega r^2/v_s^2 + \sigma_2 r\}/J_d$$

$$J_{24} = -r\{2F_n(\mu_s - \mu_k) \exp[-(v_0/v_s)^2] \omega r/v_s^2 - \sigma_2\}/J_d$$

$$J_{42} = \{2F_n(\mu_k - \mu_s) \exp[-(v_0/v_s)^2] \omega r^2/v_s^2 + \sigma_2 r\}/m_p$$

$$J_{44} = -C_p/m_p + \{2F_n(\mu_s - \mu_k) \exp[-(v_0/v_s)^2] \omega r/v_s^2 - \sigma_2\}/m_p$$

式(5)的矩阵特征值 λ 应满足:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (6)$$

其中 a_0, a_1, a_2, a_3 是特征方程的多项式系数。

3 模型求解与非线性特性分析

制动系统部分参数为: $J_d = 0.84 \text{ kgm}^2, m_p = 1.03 \text{ kg}, C_d = 1 \text{ Nmrad/s}, r = 0.12 \text{ m}, K_d = 3 \times 10^5 \text{ Nm/rad}, K_p = 3 \times 10^5 \text{ N/m}, \mu_k = 0.3, \mu_s = 0.5, F_n = 1000 \text{ N}$ 。利用 Runge-Kutta 算法对式(3)进行数值求解,得到系统振动响应及相轨迹分布,分析角速度、制动压力及摩擦因数差值对系统稳定性的影响。

3.1 角速度对稳定性的影响

图3为雅可比矩阵特征值随 ω 的分布情况。结合图3可知,当 $\omega = 0.286 \text{ rad/s}$ 时,雅可比矩阵特征值实部由正转负,制动系统从不稳定变为稳定状态。

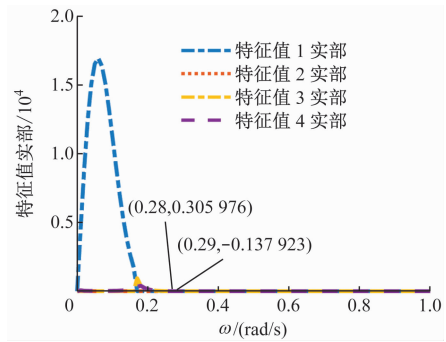


图3 雅可比矩阵特征值随 ω 的分布

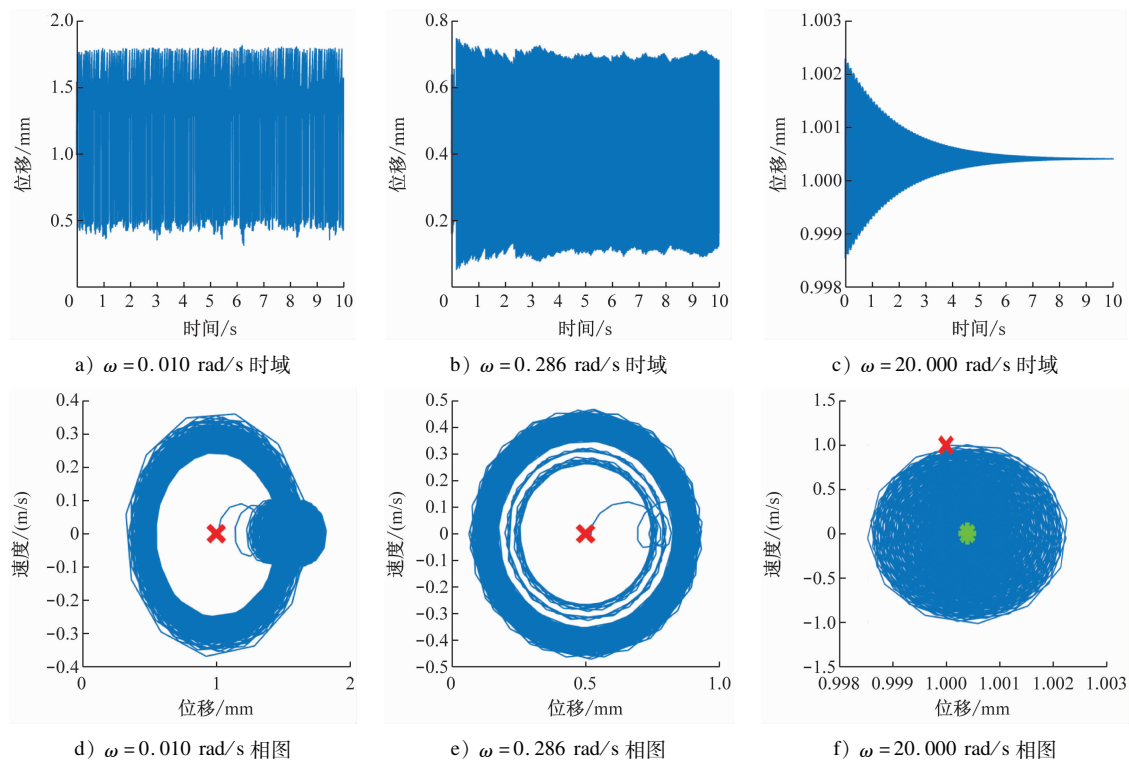
Fig. 3 Distribution of Jacobi matrix eigenvalues with ω

进一步分析 $\omega = 0.010 \text{ rad/s}, \omega = 0.286 \text{ rad/s}, \omega = 20.000 \text{ rad/s}$ 时的振动响应和相轨迹分布,如图4所示。

由图4可知:当 ω 高于临界转速时,制动系统逐渐稳定,闸片切向振动位于平衡点附近;随着 ω 的逐渐增大,制动系统到达稳定状态所需的时间增加,闸片的振幅会随着 ω 的增加而先增加后减小,制动系统的振动特性减弱。此外,当 ω 低于临界转速时,制动系统处于黏滑振动状态,存在明显的颤振现象,随着 ω 的增大,黏滑振动现象逐渐减弱直至消失,其原因是制动系统存在负阻尼,当 ω 很低时,负阻尼大于制动系统的正阻尼,制动系统吸收能量;而当 ω 增大时,负阻尼小于制动系统的正阻尼,制动系统耗散能量。可见, ω 是影响制动系统稳定性的因素之一。

3.2 制动压力对稳定性的影响

当 $\omega = 0.286 \text{ rad/s}$ 时,不同 F_n 下雅可比矩阵特征值分布情况如图5所示(其中特征值2、4的实部同特征值1、3的实部相同,图中已省略),结合图5可知,雅可比矩阵特征值实部在 $F_n = 995 \text{ N}$ 时由负



注: \times 表示初始时刻位置; \bullet 表示平衡点所在位置。

图4 不同 ω 下的时域及相轨迹分布

Fig. 4 Time-domain and phase-trajectory distributions for different ω

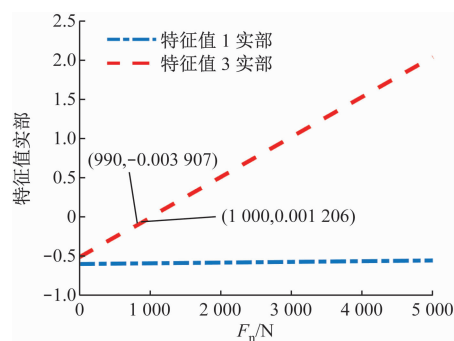


图5 雅可比矩阵特征值随 F_n 的分布

Fig. 5 Distribution of Jacobi matrix eigenvalues with F_n

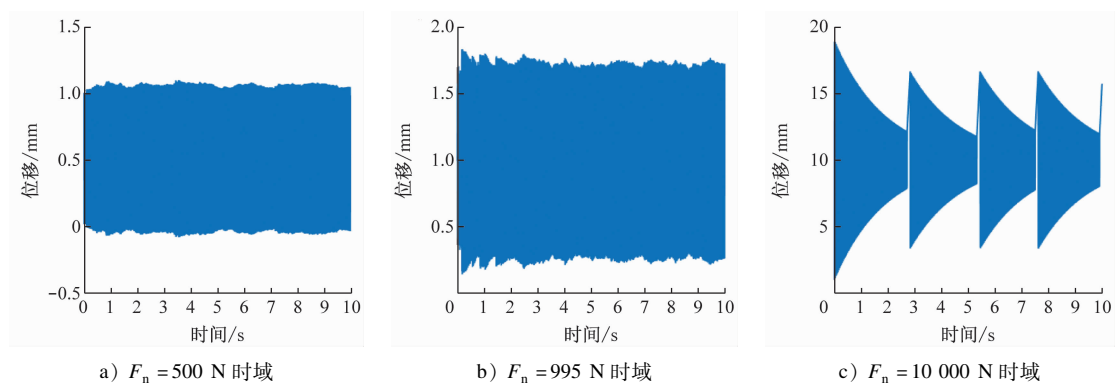
转正, 制动系统由稳定状态转为不稳定状态。

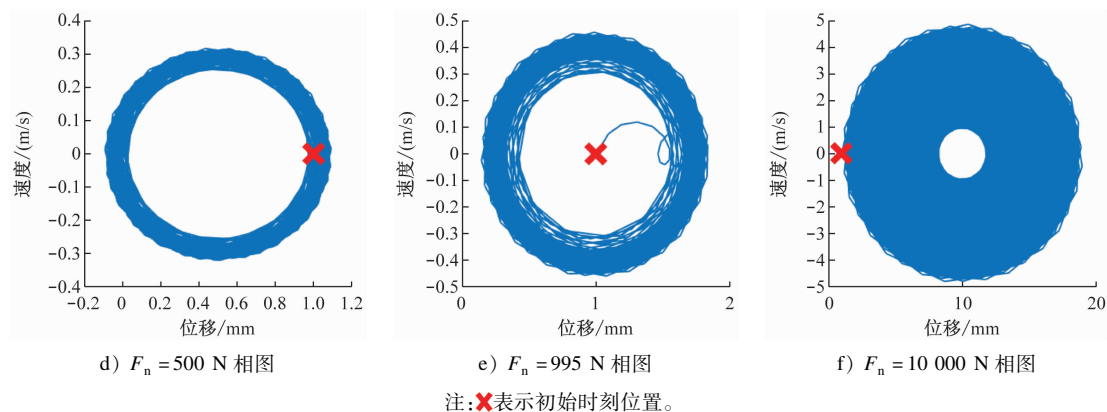
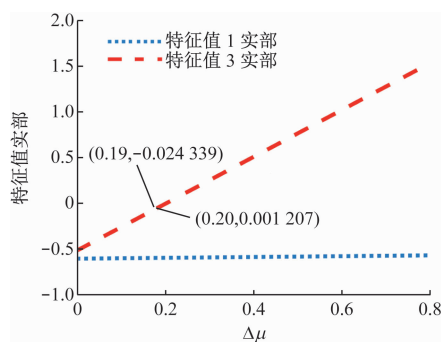
进一步分析 F_n 取 500 N、995 N、10 000 N 时的振动响应和相轨迹分布, 如图 6 所示。

由图 6 可知: 当 F_n 较低时, 制动系统处于一种相对稳定的运动状态。随着制动压力的增大, 闸片从稳定状态向黏滑状态转变, 振动更加复杂且不规则, 闸片的振动幅度逐渐增大, 振动的强度也越来越大。因此, 制动压力也是影响稳定性的因素之一。

3.3 摩擦因数差值对稳定性的影响

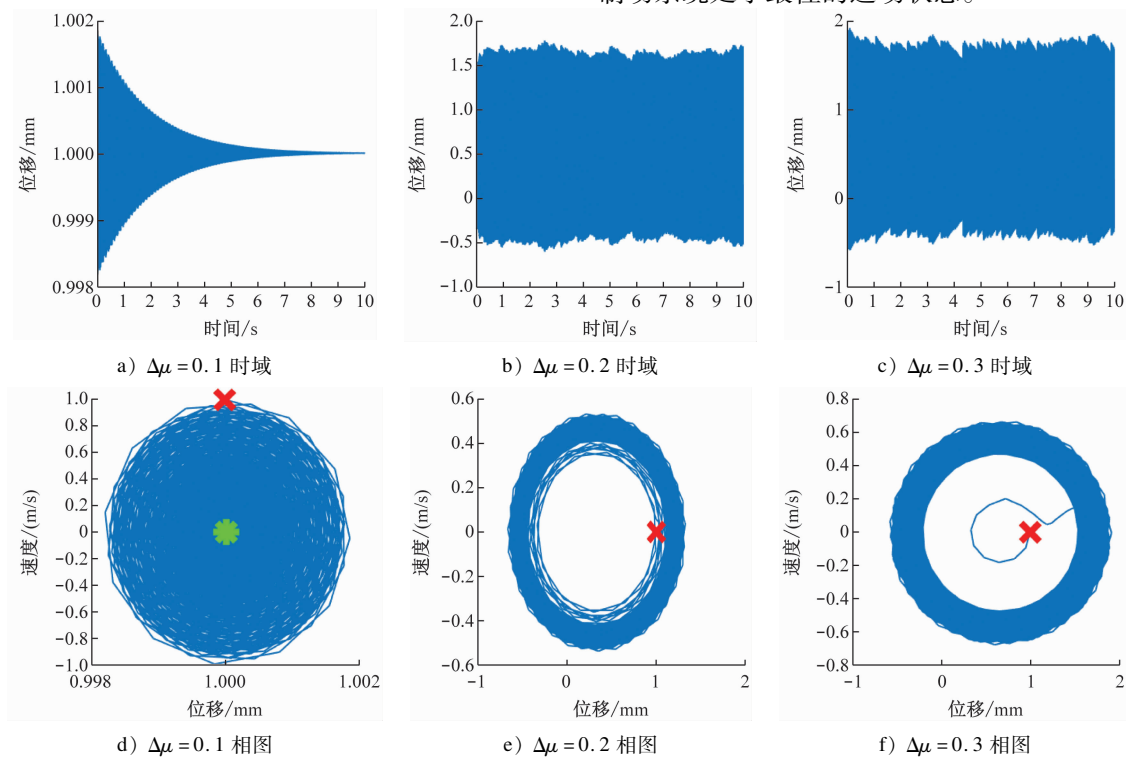
同理, $\omega = 1.000 \text{ rad/s}$ 、 $F_n = 1\ 000 \text{ N}$ 时, 不同摩



图6 不同 F_n 下的时域和相轨迹分布Fig. 6 Time-domain and phase-trajectory distributions for different F_n 图7 雅可比矩阵特征值随 $\Delta\mu$ 的分布Fig. 7 Distribution of Jacobi matrix eigenvalues with $\Delta\mu$

擦因数差值 $\Delta\mu = \mu_s - \mu_k$ 下,雅可比矩阵特征值分布情况如图7所示(其中特征值2、4实部与特征值1、3实部相同,图中已省略)。由图7可知,当 $\Delta\mu$ 取0.2时,雅可比矩阵特征值实部由负转正,即制动系统由稳定状态转为不稳定状态。

进一步分析 $\Delta\mu$ 为0.1、0.2、0.3时的振动响应和相轨迹分布,如图8所示。由图8可知:在不同 $\Delta\mu$ 下,随着 $\Delta\mu$ 的增加,制动闸片的振幅会逐渐增加,且趋于稳定状态的时间延长。因此, $\Delta\mu$ 同样是影响制动稳定性的关键。经综合考虑, $\Delta\mu = 0.2$ 时,制动系统处于最佳的运动状态。

图8 不同 $\Delta\mu$ 下的时域及相轨迹分布Fig. 8 Time-domain and phase-trajectory distributions for different $\Delta\mu$

4 结语

本文通过 LuGre 摩擦模型建立二自由度盘形制动器动力学模型,分别探究了角速度、制动压力和摩擦因数差值对系统稳定性的影响。结果表明:

1) 当 $\omega = 0.286 \text{ rad/s}$ 时,制动系统处于一种黏滑振动状态,随着角速度的逐渐增大,制动系统从黏滑运动趋向于稳定运动状态。

2) 随着制动压力的增大,制动系统逐渐由稳定状态,向黏滑状态转变,运动情况更加复杂。

3) 摩擦因数差值的增大,会增加振动的幅值,且会增加制动系统进入稳定运动状态所需的时间。

参考文献

- [1] CHEN F, OUYANG H, WANG X. A new mechanism for friction-induced vibration and noise[J]. Friction, 2023, 11(2): 302.
- [2] LU C, WANG Q, WANG Z, et al. Stick-slip characteristic analysis of high-speed train brake systems; a disc-block friction system with different friction radii[J]. Vehicles, 2023, 5(1): 41.
- [3] 马莹莹, 杨晓光, 马万经. 快速公交站台形式及位置最佳布置方法[J]. 城市交通, 2006, 4(4): 50.
MA Yingying, YANG Xiaoguang, MA Wanjing. Types of BRT stations and their optimal locations[J]. Urban Transport of China, 2006, 4(4): 50.
- [4] 葛宏伟, 王伟, 陈学武. 信号交叉口上游公交站点实际停靠延误模型[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, 40(12): 2062.
GE Hongwei, WANG Wei, CHEN Xuewu. Bus stopping delays at signal-controlled intersection with bus stops upstream[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2008, 40(12): 2062.
- [5] WONG S C, YANG H, AU YEUNG W S, et al. Delay at signal-controlled intersection with bus stop upstream[J]. Journal of Transportation Engineering, 1998, 124(3): 229.
- [6] 杨龙海, 李丽兰, 钟绍鹏. 信号交叉口进口道上游公交停靠站设置研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(2): 292.
YANG Longhai, LI Lilan, ZHONG Shaopeng. Research on the location of bus stops upstream the approach at signalized intersections[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39

- [3] WEI D, RUAN J, ZHU W, et al. Properties of stability, bifurcation, and chaos of the tangential motion disk brake[J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 375: 353.
- [4] YAN X, FAN C, WANG W, et al. Study on the influence of radial stiffness on the nonlinear vibration of brake system[J]. Industrial Lubrication and Tribology, 2022, 74(1): 10.
- [5] WEI D, WANG W, WANG B, et al. Bifurcation and chaotic behaviors of vehicle brake system under low speed braking condition[J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2021, 9(8): 2107.
- [6] HUANG Q, XIA J, LIU H. Friction-induced vibration of marine propeller shaft based on the LuGre friction model[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2023, 37(8): 3867.

· 收稿日期:2024-05-11 修回日期:2024-10-10 出版日期:2025-04-10
Received:2024-05-11 Revised:2024-10-10 Published:2025-04-10
· 第一作者:方浩,硕士研究生,2108020022028@stu.bucea.edu.cn
通信作者:王金海,副教授,wangjinhai@bucea.edu.cn
· ©《城市轨道交通研究》杂志社,开放获取 CC BY-NC-ND 协议
© Urban Mass Transit Magazine Press. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license

(上接第 14 页)

- [3] 马莹莹, 杨晓光, 马万经. 快速公交站台形式及位置最佳布置方法[J]. 城市交通, 2006, 4(4): 50.
MA Yingying, YANG Xiaoguang, MA Wanjing. Types of BRT stations and their optimal locations[J]. Urban Transport of China, 2006, 4(4): 50.
 - [4] 葛宏伟, 王伟, 陈学武. 信号交叉口上游公交站点实际停靠延误模型[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, 40(12): 2062.
GE Hongwei, WANG Wei, CHEN Xuewu. Bus stopping delays at signal-controlled intersection with bus stops upstream[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2008, 40(12): 2062.
 - [5] WONG S C, YANG H, AU YEUNG W S, et al. Delay at signal-controlled intersection with bus stop upstream[J]. Journal of Transportation Engineering, 1998, 124(3): 229.
 - [6] 杨龙海, 李丽兰, 钟绍鹏. 信号交叉口进口道上游公交停靠站设置研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(2): 292.
YANG Longhai, LI Lilan, ZHONG Shaopeng. Research on the location of bus stops upstream the approach at signalized intersections[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39
 - [7] 杨寿军. 有轨电车车站站形布置及站位设置的技术要点[J]. 城市轨道交通研究, 2019, 22(11): 128.
YANG Shoujun. Technical key points in station layout and station setting for streetcar[J]. Urban Mass Transit, 2019, 22(11): 128.
 - [8] 潘琢. 有轨电车平交路口停站方案对延误时间的影响[J]. 城市轨道交通研究, 2018, 21(3): 68.
PAN Zhuo. Influence of modern tram intersection stop strategy on the delay time[J]. Urban Mass Transit, 2018, 21(3): 68.
- 收稿日期:2023-02-13 修回日期:2023-03-30 出版日期:2025-04-10
Received:2023-02-13 Revised:2023-03-30 Published:2025-04-10
· 第一作者:周炜夏,博士研究生,2011389@tongji.edu.cn
通信作者:滕靖,教授,tengjing@tongji.edu.cn
· ©《城市轨道交通研究》杂志社,开放获取 CC BY-NC-ND 协议
© Urban Mass Transit Magazine Press. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license

欢迎订阅《城市轨道交通研究》

服务热线 021—56830728 转 821