

# 基于波函数转化法的饱和地基地铁隧道车致动力响应分析<sup>\*</sup>

郭慧吉

(上海申通地铁集团有限公司, 201103, 上海)

**摘 要** [目的] 地铁隧道车致振动会对沿线居民的正常生活、精密仪器的使用、古建筑物的结构安全等造成不利影响。为厘清地铁隧道车致振动全过程传播规律, 分析各类减隔振措施实施效果, 需建立高效的地铁隧道车致动力响应计算模型。[方法] 采用 biot 波动方程模拟地基振动特性, 采用双层薄壁壳振动方程模拟地铁隧道及隧道注浆层的振动特性, 引入平面波与柱面波的波函数转化公式, 求解半空间地基地埋置隧道动力响应基本解。在地基-隧道动力响应基本解的基础上, 采用连续线支撑的欧拉梁模拟轨道结构, 采用多体动力学模型模拟车辆荷载, 进一步耦合车辆、轨道等结构, 提出地铁隧道车致动力响应解析计算模型。基于该模型, 分析地铁隧道浮置板轨道等减振措施的减振效果。[结果及结论] 不同减振措施在发挥减振效果的同时一定程度上会导致系统部分子结构振动响应的增大, 在进行系统减振分析时应从系统性安全的角度开展减振设计, 避免局部振动放大引起的损伤现象。

**关键词** 地铁隧道; 车致振动; 动力响应; 波函数转化; 浮置板轨道

中图分类号 U260.11<sup>+</sup>1

DOI:10.16037/j.1007-869x.2025.05.028

## Analysis of Train-induced Dynamic Response of Metro Tunnel in Saturated Foundation Based on the Wave Function Transformation Method

GUO Huiji

(Shanghai Shentong Metro Group Co., Ltd., 201103, Shanghai, China)

**Abstract** [Objective] The train-induced metro tunnel vibration may affect adversely the normal life of residents along the line, the use of precision instruments, and the structural safety of ancient buildings. In order to clarify the propagation law of the entire process of train-induced metro tunnel vibration, analyze the implementation effects of various vibration isolation and reduction measures, it is necessary to establish an efficient

calculation model for the train-induced dynamic response of metro tunnels. [Method] The Biot wave equation is used to simulate the vibration characteristics of the foundation, and the vibration equation of the double-layer thin-walled shell is used to simulate the vibration characteristics of the metro tunnel and the tunnel grouting layer. The transformation formula of the wave functions for plane and cylindrical waves is introduced to solve the basic solution of the dynamic response of the tunnel embedded in the half-space foundation. Based on the basic solution of the dynamic response of the foundation-tunnel, the Euler beam with continuous line support is used to simulate the track structure, and the multi-body dynamics model is used to simulate the vehicle load. Subsequently, the structures such as vehicles and tracks are further coupled, and an analytical calculation model for the train-induced dynamic response of metro tunnels is proposed. Based on this model, the vibration reduction effects of vibration reduction measures such as the floating slab track of the metro tunnel are analyzed. [Result & Conclusion] While exerting the vibration reduction effect, different vibration reduction measures will lead to an increase in the vibration response of some sub-structures of the system to a certain extent. When analyzing the vibration reduction of the system, the vibration reduction design should be carried out from the perspective of systemic safety to avoid damage caused by the local vibration amplification.

**Key words** metro tunnel; train-induced vibration; dynamic response; wave function transformation; floating slab

## 0 引言

随着城市轨道交通规模增加, 因行车振动导致的隧道结构变形、沿线噪声、振动问题也越发突出<sup>[1]</sup>。探明地铁隧道车致振动响应的传播规律, 提出可靠的车辆-轨道-隧道-地基系统动力响应预测方法, 构建有效的减隔振技术措施, 已刻不容缓。

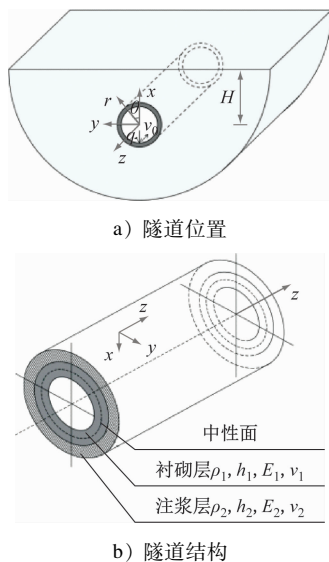
<sup>\*</sup> 上海市自然科学基金面上项目(24ZR1455500)

为此国内外相关学者进行了大量研究,其中隧道系统动力响应计算方法主要有解析模型和数值模型两大类。解析模型中具有代表性的有 2 维欧拉梁模型<sup>[2]</sup>、全空间管中管模型<sup>[3]</sup>以及半空间波函数转化法模型<sup>[4]</sup>。解析模型计算速度快、方便进行参数分析,可以更深层次了解振动传播的一般规律,但难以处理不规则边界。与解析模型相比,数值模型的优势在于可以进行更精细化建模。常见的数值模型有 2 维有限元模型<sup>[5]</sup>、3 维有限元模型<sup>[6]</sup>、2.5 维有限元模型以及周期性有限元模型<sup>[7]</sup>、多耦合周期性有限元模型<sup>[8]</sup>。尽管数值模型可以处理复杂的边界(界面),便于考虑复杂的地基结构,但计算成本较高。

综合考虑解析模型与数值模型的优缺点,本文建立饱和半空间地基双层壳模型,分析各类减振措施的效果,以期对相关工程提供借鉴与参考。

## 1 地铁车致动力响应计算模型

地铁车致动力响应问题是大系统的耦合振动问题,涉及到车辆、轨道、隧道和地基土体等多个子结构系统。为厘清振动传播全过程,本文提出解析算法,算法模型简化示意图如图 1 所示。



注:  $(x, y, z)$ —直角坐标系分量;  $(r, \theta, z)$ —圆柱坐标系分量;  $\rho$ —材料的密度;  $h$ —厚度;  $E$ —弹性模量;  $\nu$ —泊松比;  $q$ —激振荷载;  $v_0$ —荷载移动速度;  $H$ —隧道埋深。

图 1 模型简化示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the simplified model

将地基视为中空的半空间饱和多孔介质, Biot 多孔介质波动方程如式(1)所示,过程计算量  $\rho_b =$

$n_0\rho_l + (1 - n_0)\rho_s$ 。

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 u_b + (\lambda + \mu + \alpha^2 M) \nabla(\nabla \cdot u_b) + \\ \alpha M \nabla(\nabla \cdot w) = \rho_b u_b'' + \rho_l w'' \\ \alpha M \nabla(\nabla \cdot u_b) + M \nabla(\nabla \cdot w) = \rho_l u_b'' + \\ \rho_l / n_0 w'' + b w' \end{cases} \quad (1)$$

式中:

- $n_0$ ——土体孔隙率;
- $\nabla$ ——哈密顿算子;
- $\rho_l$ ——孔隙流体密度;
- $\rho_s$ ——土骨架密度;
- $u_b$ ——土骨架位移;
- $w$ ——孔隙液体相对于土骨架位移;
- $\lambda, \mu$ ——土骨架的 Lamé 常数;
- $\alpha$ ——土颗粒压缩常数;
- $M$ ——孔隙流体压缩常数;
- $b$ ——反映黏性耦合的参数;
- $\cdot$ ——表示张量计算中的散度计算。

采用双重傅里叶变化处理式(1),可获得土体频域-波数域内振动控制方程。考虑到地基中存在水平界面和中空圆柱界面,因此分别在直角坐标系与圆柱坐标系下,基于 Helmholtz 矢量分解定理进行求解<sup>[9]</sup>,可得直角坐标系下平面波位移表达式:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{U}}_{1d} &= \nabla \times (\mathbf{e}_z \hat{\tilde{\varphi}}_{SH}) = [ik_y, ik_{sx}, 0] e^{ik_{sx}x + ik_yy} \\ \hat{\tilde{U}}_{2d} &= \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_z \hat{\tilde{\varphi}}_{SV}) = \\ &[k_z k_{sx}, -k_z k_y, k_y^2 + k_{sx}^2] e^{ik_{sx}x + ik_yy} \\ \hat{\tilde{U}}_{3d} &= \nabla \hat{\tilde{\varphi}}_{P1} = [-ik_{px1}, ik_y, ik_z] e^{ik_{px1}x + ik_yy} \\ \hat{\tilde{U}}_{4d} &= \nabla \hat{\tilde{\varphi}}_{P2} = [-ik_{px2}, ik_y, ik_z] e^{ik_{px2}x + ik_yy} \end{aligned} \quad (2)$$

式中:

- 上标“—”——y 向波数域;
- 上标“^”——z 向波数域;
- 上标“~”——环向模态分解;
- $\mathbf{e}_z$ ——z 向单位向量;

$\varphi_{SH}, \varphi_{SV}, \varphi_{P1}, \varphi_{P2}$ ——剪切波 SH 波、SV 波、第一纵波  $P_1$  波、第二纵波  $P_2$  波的波势函数;

$k_s, k_{p1}, k_{p2}$ ——剪切波波数、第一纵波  $P_1$  波数、第二纵波  $P_2$  的波数;

$U$ ——位移势函数;

下标 1、2、3、4——SH、SV、 $P_1$ 、 $P_2$  波;

下标 d——下行波;

$k_y, k_z$ ——y 向与 z 向的波数;

$k_{sx}$ 、 $k_{px1}$ 、 $k_{px2}$ ——S波与P波 $x$ 向的波数；

“ $\times$ ”——张量计算中的旋度计算。

直角坐标系下,只需将式(2)中 $k_{sx}$ 、 $k_{px1}$ 、 $k_{px2}$ 替换为 $-k_{sx}$ 、 $-k_{px1}$ 、 $-k_{px2}$ 即可得上行波(u)位移势函数 $\hat{U}_u$ 。

圆柱坐标系下柱面波位移表达式为:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{m1o} &= \nabla \times (\mathbf{e}_z \hat{\varphi}_{mSH}) = \\ &\left[ \frac{im}{r} H_m^{(1)}(k_{sr}r), -k_{sr} H_m^{(1)'}(k_{sr}r), 0 \right] e^{im\theta} \\ \hat{U}_{m2o} &= \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_z \hat{\varphi}_{mSV}) = \\ &\left[ ik_z k_{sr} H_m^{(1)'}(k_{sr}r), \frac{-mk_z}{r} H_m^{(1)}(k_{sr}r), k_{sr}^2 H_m^{(1)}(k_{sr}r) \right] e^{im\theta} \\ \hat{U}_{m3o} &= \nabla \hat{\varphi}_{mP1} = \\ &\left[ k_{pr1} H_m^{(1)'}(k_{pr1}r), \frac{im}{r} H_m^{(1)}(k_{pr1}r), ik_z H_m^{(1)}(k_{pr1}r) \right] e^{im\theta} \\ \hat{U}_{m4o} &= \nabla \hat{\varphi}_{mP2} = \\ &\left[ k_{pr2} H_m^{(1)'}(k_{pr2}r), \frac{im}{r} H_m^{(1)}(k_{pr2}r), ik_z H_m^{(1)}(k_{pr2}r) \right] e^{im\theta}\end{aligned}\quad (3)$$

式中:

下标 $o$ ——表示柱面外行波;

下标 $m$ ——表示角向模态分解量;

$H_m^{(1)}$ ——第一类Hankel函数;

$k_{sr}$ 、 $k_{pr1}$ 、 $k_{pr2}$ ——S波与P波 $r$ 向的波数。

圆柱坐标下,只需将式(3)中 $H_m^{(1)}$ 替换为第一类Bessel函数 $J_m^{(1)}$ 即可得内行波(t)位移势函数 $\hat{U}_{mt}$ 。

将式(2)、式(3)代入Biot多孔介质物理方程可得直角坐标系下孔压及应力表示式 $\hat{\tilde{P}}_{j,d,u}$ 、 $\hat{\tilde{S}}_{j,d,u}$ ,以及圆柱坐标系下孔压及应力表达式 $\tilde{\tilde{P}}_{mj,o,t}$ 、 $\tilde{\tilde{S}}_{mj,o,t}$ 。因此中空半空间地基波场位移 $u_b$ 、孔压 $p$ 以及应力 $\sigma$ 响应表达式可写为:

$$\begin{cases} \tilde{u}_b = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \hat{\tilde{U}}_{jd} A_{jd} dk_y + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \tilde{\tilde{U}}_{mjo} A_{mjo} \\ \tilde{\tilde{p}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=3}^4 \hat{\tilde{P}}_{jd} A_{jd} dk_y + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=3}^4 \tilde{\tilde{P}}_{mjo} A_{mjo} \\ \tilde{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \hat{\tilde{S}}_{jd} A_{jd} dk_y + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \tilde{\tilde{S}}_{mjo} A_{mjo} \end{cases}\quad (4)$$

式中:

$A_{jd}$  ( $j=1,2,3,4$ )——直角坐标下波势函数的待定系数;

$A_{mjo}$  ( $j=1,2,3,4$ ;  $m$ 数值计算取 $-20 \sim 20$ 范围内的正整数)——圆柱坐标下波势函数的待定系数。

将隧道及隧道注浆层简化为双层薄壁圆柱壳,引入双层薄壁壳控制方程<sup>[3]</sup>。为实现模型耦合求解,针对简化模型的边界(地面与模型下边界)以及界面(土层交界面以及隧-土交界面)做以下假设:①地面边界假定为地面处应力消散为0,且地面边界透水;②模型下边界可分为两种情况考虑,即为半无限空间,即无限远处,位移、应力、孔压消散为0;③地基土体与隧道衬砌接触面处界面假定为位移、应力连续,且隧道衬砌不透水。

为满足柱面波与平面波在同一边界条件的耦合求解,引入Bessel函数与指数函数间的转化关系<sup>[9]</sup>:

$$\begin{cases} H_m^{(1)}(k_r r) e^{im\theta} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i^{-m} e^{im\beta}}{k_x} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_y \\ e^{i(k_x x + k_y y)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{-m} J_m^{(1)}(k_r r) e^{im\theta + m\beta} \end{cases}\quad (5)$$

过程计算量 $\beta = \arcsin(k_y/k_r)$ 。

式中:

$J_m^{(1)}$ ——第一类Bessel函数;

$k_x$ ——直角坐标系下 $x$ 向波数;

$k_r$ ——圆柱坐标系下 $r$ 向波数。

结合边界假设,利用式(5)进行波函数转化可获得半空间地基埋置隧道响应基本解。在此基础上,进一步耦合车辆、轨道等结构<sup>[3]</sup>,采用连续线支撑的欧拉梁模拟轨道结构,采用多体动力学模型模拟车辆荷载,最终可得地铁隧道车致动力响应解析计算模型。

## 2 系统设计参数减振效果分析

选取上海地铁典型工况,分析动力设计参数对系统动力响应的影响。取隧道直径一倍埋深的区间进行分析,衬砌计算参数取值如表1所示,地基土体、注浆层以及列车计算参数参见文献[3]。

首先,分析浮置板道床刚度对不同位置车致振动的影响,分析不同浮置板刚度下钢轨、道床、隧道壁和地面等不同位置的振动加速度响应,计算结果如图2所示。

表 1 隧道衬砌计算参数

Tab. 1 Calculation parameters for tunnel lining

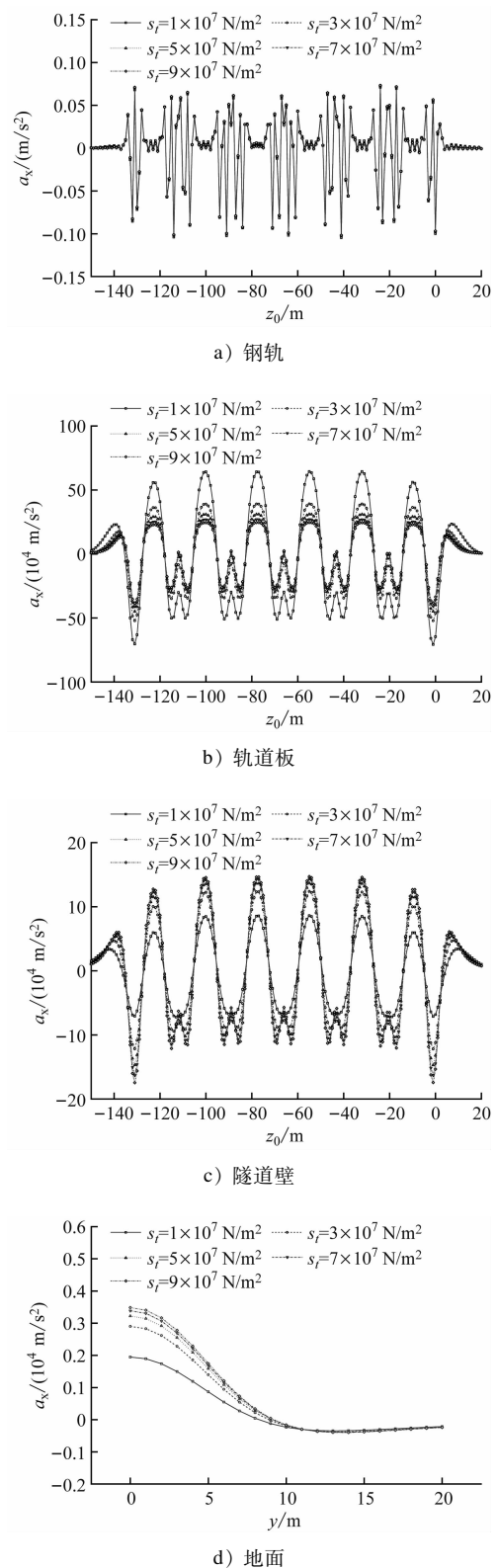
弹性模量 $E_1/\text{Pa}$	泊松比 $\nu_1$	密度 $\rho_1/(\text{kg}/\text{m}^3)$	外径 $R_0/\text{m}$	厚度 $h_1/\text{m}$
$5 \times 10^{10}$	0.3	2 500	3.3	0.35

由图 2 可见,不同浮置板刚度下的钢轨振动加速度曲线呈现出高度的相似性。然而,不同浮置板刚度下道床、隧道壁及地面等区域的振动加速度曲线之间幅值出现了明显的差异。进一步分析发现,隧道壁和地面处的振动加速度随着浮置板刚度的增加而增大。相比之下,在道床处振动加速度随着浮置板刚度的增加而减小。该现象表明,浮置板刚度越小减振效果越好,有效阻隔了振动的传播,进而导致隧道壁与地面处的振动加速度减小,但其在阻隔振动传播的同时也增大了轨道板与钢轨处振动的峰值,所以应加强对浮置板区段轨道结构的巡检维修养护。

进一步探讨注浆层厚度  $h_2$  对车致振动响应的影响,计算结果如图 3 所示。由图 3 可见,不同注浆层厚度下轨道处的响应基本一致。而道床、隧道壁及地面处振动加速度的幅值在不同注浆层厚度下存在差异。隧道壁及道床处振动加速度随着注浆层厚度的增大而减小。相比之下,地面处振动加速度随着注浆层厚度的增大而增大。分析其原因在于洞外主动注浆会一定程度上引起地基刚度增大,更利于振动的传播。通过分析浮置板道床刚度与注浆层厚度对系统动力响应的影响可以发现,减振措施的应用,可能会增大部分结构部件的振动响应,故在进行减振设计时应从系统性安全的角度开展分析,避免局部振动放大引起的损伤现象。

### 3 结语

本文提出一种基于双层薄壁圆柱壳的饱和地基地铁车致动力响应半解析计算模型,可用于分析各类减振措施的效果。浮置板弹簧刚度对钢轨振动加速度影响较小,对道床、隧道壁及地面处振动加速度有一定影响,且轨道板弹簧刚度越大,轨道板振动加速度越小,隧道壁和地面等位置处振动加速度越大。不同减振措施在发挥减振效果的同时一定程度上会导致系统部分子结构振动响应的增大,故在进行系统减振分析时应从系统性安全的角度开展减振设计,避免局部振动放大引起的损伤现象。



注:  $a_x$ — $x$  向振动加速度;  $z_0$ — $z$  向移动坐标量;  $s_f$ —弹簧刚度。

图 2 不同浮置板弹簧刚度下的系统动力响应图

Fig. 2 Diagram of system dynamic response under different floating slab spring stiffness



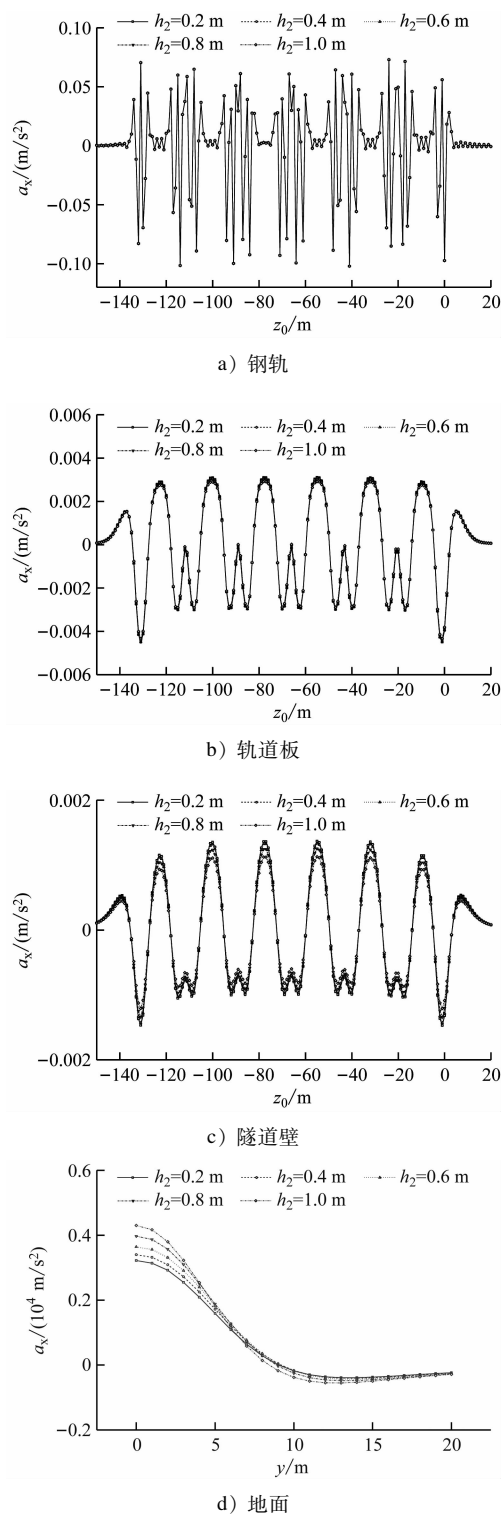


图3 不同注浆层厚度下的系统动力响应图

Fig. 3 Diagram of system dynamic response under different thicknesses of grouting layer

## 参考文献

- [1] 刘加华. 轨道交通隧道系统动力设计计算新进展[J]. 隧道与轨道交通, 2023(1): 5.  
LIU Jiahua. New advances in dynamic calculation of rail transit tunnel systems[J]. Tunnel and Rail Transit, 2023(1): 5.
- [2] HU A, LI Y, DENG Y, et al. Vibration of layered saturated ground with a tunnel subjected to an underground moving load[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 119: 103342.
- [3] 狄宏规, 周顺华, 何超, 等. 饱和地基地铁盾构隧道车致动应力响应特征[J]. 铁道学报, 2018, 40(8): 160.  
DI Honggui, ZHOU Shunhua, HE Chao, et al. Response of dynamic stress in saturated soil induced by moving metro train in shield tunnel[J]. Journal of the China Railway Society, 2018, 40(8): 160.
- [4] YUAN Z, BOSTRÖM A, CAI Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space[J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 387: 177.
- [5] BALENDRA T, CHUA K H, LO K W, et al. Steady-state vibration of subway-soil-building system[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(1): 145.
- [6] BIAN X, HU H, ZHAO C, et al. Protective effect of partition excavations of a large-deep foundation pit on adjacent tunnels in soft soils: a case study[J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2021, 80(7): 5693.
- [7] MA L, ZHANG C, OUYANG H, et al. 2.5D modelling of wave propagation in longitudinally curved viscoelastic structure using a coupled FEM-PML approach[J]. Engineering Structures, 2021, 226: 111337.
- [8] 狄宏规, 郭慧吉, 周顺华, 等. 非饱和土-结构动力响应的多耦合周期性有限元法[J]. 力学学报, 2022, 54(1): 163.  
DI Honggui, GUO Huiji, ZHOU Shunhua, et al. Multi coupling periodic finite element method for calculating the dynamic response of unsaturated soil-structure system[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(1): 163.
- [9] HE C, ZHOU S, GUO P, et al. Theoretical modelling of the dynamic interaction between twin tunnels in a multi-layered half-space[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 456: 65.

• 收稿日期:2024-09-14 修回日期:2024-10-21 出版日期:2025-05-10  
Received:2024-09-14 Revised:2024-10-21 Published:2025-05-10  
• 通信作者:郭慧吉,工程师,287667308@qq.com  
• ©《城市轨道交通研究》杂志社,开放获取 CC BY-NC-ND 协议  
© Urban Mass Transit Magazine Press. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license