

基于摩擦自激振动理论的地铁线路梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统钢轨波磨研究

崔晓璐^{1,2} 何志强¹ 程 桢¹ 杨宗超³ 杨宏光⁴

(1. 重庆交通大学机电与车辆工程学院, 400074, 重庆; 2. 重庆市轨道交通(集团)有限公司, 401120, 重庆;
3. 中铁物总运维科技有限公司, 100036, 北京; 4. 中车长春轨道客车股份有限公司, 130062, 长春//第一作者, 副教授)

摘 要 基于摩擦自激振动理论,研究了地铁线路梯形轨枕支承小半径曲线轨道上出现的钢轨波磨病害的成因及影响因素。建立了梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统的有限元模型,利用复特征值法研究了轮轨系统的摩擦自激振动特性,并分别讨论了轨道减振结构中侧向缓冲垫参数、底部橡胶垫板参数和扣件参数对轮轨系统发生摩擦自激振动的影响。结果表明,在梯形轨道支承小半径曲线轨道上,诱导该区段钢轨波磨的主要成因可能是轮轨间蠕滑力饱和导致的摩擦自激振动;总的扣件刚度和底部橡胶垫板的垂向阻尼对轮轨系统自激振动的影响较为明显,轮轨系统的不稳定振动趋势随扣件刚度和底部橡胶垫板的垂向阻尼的增加而降低。因此,在一定范围内通过增大扣件刚度和底部橡胶垫板垂向阻尼,有助于缓解梯形轨枕支承小半径曲线轨道上钢轨波磨的发生趋势。

关键词 地铁; 轮轨系统; 梯形轨枕; 小半径曲线; 钢轨波磨; 摩擦自激振动理论

中图分类号 U213.4⁺²

DOI:10.16037/j.1007-869x.2022.06.004

Research on Rail Corrugation on Sharp Curved Track Supported by Trapezoid Sleepers Based on Friction Self-excited Vibration Theory

CUI Xiaolu, HE Zhiqiang, CHENG Zhi, YANG Zongchao, YANG Hongguang

Abstract Based on friction self-excited vibration theory, the cause and influencing factors of rail corrugation on the sharp curved track supported by trapezoid sleepers are studied. Finite element model of wheel-rail on a sharp curved track supported by trapezoid sleepers is established. Then, the self-excited vibration characteristics of the wheel-rail system are studied by using the complex eigenvalue analysis. The influence of the stiffness-damping parameters of fastener and lateral cushion and bottom rubber pad on friction self-excited vibration of wheel-rail system is discussed. Results show that, on the sharp

curved track supported by trapezoid sleepers, the main cause of interval rail corrugation may be the friction self-excited vibration caused by the saturation of creep force between wheel and rail. The total fastener stiffness and the vertical damping of the bottom rubber pad have obvious effects on the self-excited vibration of the wheel-rail system. The unstable vibration tendency decreases with the increase of fastener stiffness and vertical damping of bottom rubber pad. Therefore, within certain range, by increasing fastener stiffness and vertical damping of bottom rubber pad, occurrence of rail corrugation on sharp curved track supported by trapezoid sleepers can be alleviated.

Key words metro; wheel-rail system; trapezoid rail sleeper; sharp curved track; rail corrugation; friction self-excited vibration theory

First-author's address School of Mechatronics & Vehicle Engineering, Chongqing Jiaotong University, 400074, Chongqing, China

0 引言

钢轨波磨作为常见的轨道损伤问题之一,是钢轨顶面沿纵向出现的一种规律性、似波浪状的不平顺磨损现象^[1]。其产生的噪声不仅对乘客的乘车舒适性造成极大影响,而且还会使车辆和轨道结构部件的使用寿命大为降低,极大增加了铁路工务维修费用。目前,对于铁路轨道上出现的钢轨波磨问题尚未找到根本解决方法,但提出了一些相应的控制措施^[2]。

现阶段关于钢轨波磨的成因,大致可分成以下两种观点^[3]:①钢轨顶面的粗糙度导致轮轨间瞬态动态接触特性波动,进而产生波磨病害;②轮轨间黏滑振动导致轮轨摩擦自激产生,进而导致摩擦功波动和相应的波磨病害。

轨道支承结构常被作为研究钢轨波磨病害的

重要对象。基于上述两种理论,研究者们以轨道支承结构为着入点,开展了一系列的研究工作,并提出了相应缓解波磨病害的措施。文献[4]从频域角度出发,调查了北京地铁隧道、桥梁上减振器扣件轨道结构上的钢轨波磨问题,发现钢轨波磨与扣件的刚度阻尼有关,通过优化扣件参数可以减缓钢轨波磨的发展。文献[5]基于固定波长机理,建立了非线性钢轨波磨预测模型,发现降低轨垫刚度可以降低磨耗速率,缓解钢轨波磨发展。文献[6]利用频域波磨模型,对影响钢轨波磨的主要轨道支承结构参数进行了大量调查分析,发现轨枕质量、轨枕间距、轨垫横向刚度、轨垫垂向刚度、道床垂向刚度对钢轨波磨的影响较大,通过优化轨枕质量、轨枕间距、轨垫垂向刚度参数可以减缓钢轨波磨发生趋势。文献[7]基于轮轨磨损理论与瞬态动力学的观点,利用线性钢轨波磨的预测模型,发现轮轨顶面的粗糙度与钢轨波磨病害的产生紧密相关,导致波磨产生的直接原因是车辆轨道结构部分产生共振,通过采用连续的轨道支承结构能有效避免波磨病害。

本文基于摩擦自激振动理论研究某地铁线路梯形轨枕支承小半径曲线轨道上出现的波磨病害,通过对梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统有限元模型的复特征值分析,研究了轨道减振结构中侧向缓冲垫、底部橡胶垫板参数与扣件参数对轮轨摩擦自激振动发生趋势的影响。同时,提出了相应的缓解波磨病害的措施。

1 地铁梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统仿真模型及理论方法

1.1 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统接触模型

梯形轨枕是地铁线路上常用的一种轨道支承结构,特别应用于对减振要求较高的路段。梯形轨枕轨道主要由钢轨、扣件系统、连接钢管、道床、侧向缓冲垫、底部橡胶垫板和支撑块组成^[8]。侧向缓冲垫和底部橡胶垫板作为道床与支撑块之间的减振缓冲结构,又被统称为轨道减振结构。

根据梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统的结构形式,结合 SIMPACK 动力学仿真模型,建立梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统的接触模型,如图1所示。通常而言, R (曲线半径) ≤ 350 m 的曲线称之为小半径曲线^[3]。当地铁车辆通过梯形轨枕支承小半径曲线轨道时,轮对两端外侧受到的垂向悬

挂力和横向悬挂力分别为 F_{SVL} 和 F_{SLL} 。轮对两端内侧受到的垂向悬挂力和横向悬挂力分别为 F_{SVR} 和 F_{SLR} 。外轮法向力为 N_L ,蠕滑力为 F_L ;内轮法向力为 N_R ,蠕滑力为 F_R ^[3]。扣件系统、侧向缓冲垫和底部橡胶垫板利用接地弹簧和阻尼单元模拟。外轮、内轮与钢轨间的接触角分别为 δ_L 、 δ_R 。扣件的垂向刚度、垂向阻尼分别为 K_{RV} 和 C_{RV} 。轨道减振结构中侧向缓冲垫的横向刚度、横向阻尼分别为 K_{SL} 、 C_{SL} ,底部橡胶垫板的垂向刚度、垂向阻尼分别为 K_{SV} 、 C_{SV} 。其中, K_{SL} 与 K_{SV} 数值相同, C_{SL} 与 C_{SV} 数值相同^[8]。

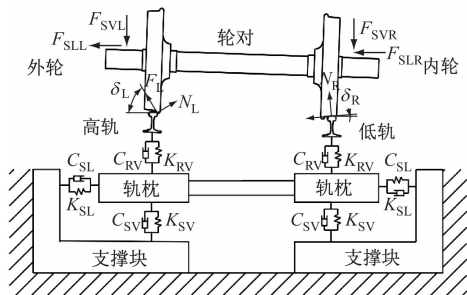


图1 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统接触模型

Fig. 1 Contact model of the wheel-rail on a sharp curved track supported by trapezoid sleepers

1.2 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统有限元模型

根据标准型梯形轨枕轨道结构以及轮轨接触模型,利用 ABAQUS 有限元软件建立梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统的有限元模型,如图2所示。

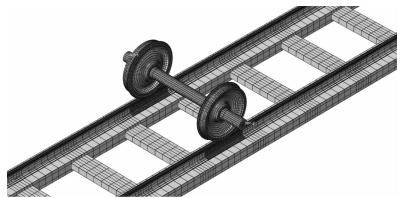


图2 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统有限元模型

Fig. 2 Finite element model of the wheel-rail on a sharp curved track supported by trapezoid sleepers

该有限元模型中的各部件分别为轮对、钢轨和轨道支承结构,其材料参数取值如表1所示^[3]。

模型中各部件尺寸为实际尺寸,采用固体单元模拟。由于导向轮对对波磨病害的影响最大,因此模型中的轮对特指导向轮对。钢轨为长30 m的标准钢轨,其两端边界设置为6个自由度全约束。轮对与钢轨的接触细节如图3所示,轮轨摩擦系数设

表 1 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统各部件参数
Tab.1 Parameters of various components of the wheel-rail on a sharp curved track supported by trapezoid sleepers

部件	弹性模量/MPa	泊松比	体积质量/(kg/cm ³)
车轮	2. 10 × 10 ⁵	0.3	7. 80 × 10 ⁻⁹
钢轨	2. 10 × 10 ⁵	0.3	7. 79 × 10 ⁻⁹
道床	3. 24 × 10 ⁴	0.2	2. 40 × 10 ⁻⁹

置为 0.45。为了使模型计算结果更好收敛,需要对轮对与钢轨接触区域的网格作细化处理。在轨道支承结构中,扣件间距为 625 mm,轨距为 1 435 mm。扣件系统简化为弹簧阻尼单元,由于单元数目众多,因此采用 Python 脚本程序自动生成^[3]。侧向缓冲垫和底部橡胶垫板在软件中利用点对面的形式直接设置生成。扣件系统与减振结构参数如表 2 所示^[8]。本文主要研究梯形轨枕支承小半径曲线轨道的固有特性,有限元模型中不考虑支撑块以简化计算。

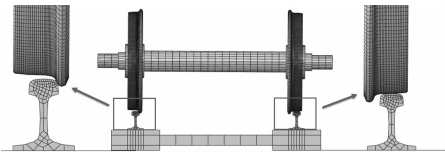


图 3 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨接触细节
Fig.3 Details of wheel-rail contact of trapezoid sleeper supporting sharp curved track

表 2 梯形轨枕轨道支承结构参数
Tab.2 Support structure parameters of trapezoid sleeper track

参数	取值
扣件垂向刚度/(MN/m)	18. 28
扣件纵向刚度/(MN/m)	8. 00
扣件横向刚度/(MN/m)	8. 00
扣件垂向阻尼/(Ns/m)	6 361. 29
扣件纵向阻尼/(Ns/m)	1 830. 22
扣件横向阻尼/(Ns/m)	1 830. 22
底部橡胶垫板刚度/(N/m)	2 × 10 ⁷
侧向缓冲垫刚度/(N/m)	2 × 10 ⁷
底部橡胶垫板阻尼/(Ns/m)	7 × 10 ⁴
侧向缓冲垫阻尼/(Ns/m)	7 × 10 ⁴

1.3 复特征值法

通过对梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统发

生摩擦自激振动时的振动频率和相应的振动模态的提取,预测系统稳定性的方法称为复特征值法^[3]。建立不考虑摩擦和外力作用影响的运动微分方程:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \tag{1}$$

式中:

x ——节点位移向量;
 $M、C、K$ ——分别为质量、阻尼、刚度矩阵,且均为对称矩阵。

根据式(1),可得到通解:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n y_k \exp(\alpha_k + jw_k)t \tag{2}$$

式中:

y_k ——第 k 阶特征向量;
 $\alpha_k + jw_k$ ——第 k 阶复特征值,其中, α_k 为特征值的实部, w_k 为特征值的虚部;
 t ——时间。

当 $\alpha_k > 0$ 时,轮轨系统可能会发生摩擦自激振动。

同时,通过引入评判摩擦自激振动发生趋势的等效阻尼比 $\xi_k (\xi_k = -\alpha_k / (\pi |w_k|))$ 亦可。当 ξ_k 为负值时,说明轮轨系统可能会发生摩擦自激振动,等效阻尼比越大,其发生的概率越小。

1.4 轮轨摩擦自激振动诱发波磨理论

通常铁路领域认为轮对与钢轨间的摩擦功波动是引发波磨病害的主要原因。文献[9]提出的磨损公式如下:

$$w = K(H - C_0) \tag{3}$$

式中:

w ——单位时间内钢轨顶面的磨损量;
 K ——磨损系数;
 H ——摩擦功(H 为饱和蠕滑力 F 与相对速度 v_0 的乘积);
 C_0 ——耐久性摩擦功。

在小半径曲线轨道上 F 将达到饱和状态时, F 为:

$$F = \mu N \tag{4}$$

式中:

μ ——轮轨间的动摩擦系数;
 N ——轮轨间的法向接触力。

根据式(4)可知,当轮轨系统发生摩擦自激振动时,轮轨间的摩擦功也出现了同频率的振动,进而导致波磨病害的产生^[3]。

1.5 轮轨系统的复特征值分析

根据前期调查和现场测试,在曲线半径为 300 m 的梯形轨枕支承小半径曲线轨道上,钢轨波磨的情况十分严重,其波长主要集中在 60 ~ 80 mm^[10],且主要发生在低轨上,而通过此路段地铁车辆的运营速度约为 80 km/h。根据频率 f 、速度 v 和波长 λ 的关系式 $f=v/\lambda$,可以求得波磨的频率为 277.8 ~ 463.0 Hz。

本文针对梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统有限元模型进行复特征值分析,提取相应的摩擦自激振动模态和频率,如图 4 所示。

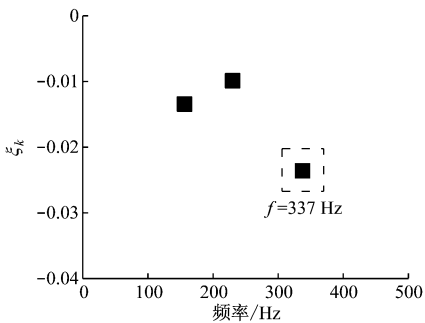


图 4 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统的等效阻尼比分布图

Fig. 4 Equivalent damping ratio distribution of the wheel-rail on a sharp curved track supported by trapezoid sleepers

由图 4 可见, ξ_k 分别为 -0.013 430、-0.009 887、-0.023 590,其对应的频率分别为 156 Hz、230 Hz、337 Hz,说明梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统存在 3 个摩擦自激振动频率。其中, ξ_k 是用于评判轮轨摩擦自激振动的重要参数。当梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统的等效阻尼比为负数时,系统才可能会发生摩擦自激振动,且数值越小,系统发生摩擦自激振动的趋势越大。因此可认为当 $\xi_k = -0.023\ 590$ 时,此时轮轨系统发生摩擦自激振动的情况最容易出现,其对应的摩擦自激振动频率为 337 Hz。该频率下对应的振动模态如图 5 所示。由图 5 可知,轮轨系统摩擦自激振动发生在低轨上。综上所述,当轮轨系统振动频率为 337 Hz 时,其会产生摩擦自激振动且发生在低轨上,从而可能诱导波长为 66 mm 的波磨,这与实际测试结果相符,进一步证明了诱导梯形轨枕支承小半径曲线轨道上波磨病害的成因可能是轮轨间的

摩擦自激振动。

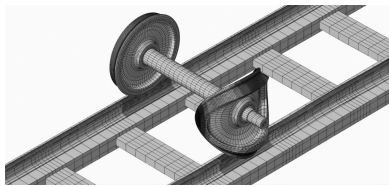


图 5 梯形轨枕支承小半径曲线轮轨系统的摩擦自激振动模态

Fig. 5 Friction self-excited vibration mode of the wheel-rail on a sharp curved track supported by trapezoid sleepers

2 轨道减振结构参数和总的扣件参数对轮轨摩擦自激振动的影响

2.1 轨道减振结构参数对轮轨摩擦自激振动的影响

在梯形轨枕支承小半径曲线轨道支承结构中,梯形轨枕与支撑块之间的底部橡胶垫板和侧向缓冲垫是该轨道支承结构中减振降噪的主要部件。因此,轨道减振结构对于轮轨系统的振动具有重要影响^[10]。采用参数化分析研究梯形轨枕支承小半径曲线轨道减振结构中侧向缓冲垫与底部橡胶垫板的结构参数呈倍数变化时对轮轨摩擦自激振动的影响。减振型轨道中减振结构的静态刚度一般在 $8 \times 10^6 \sim 4 \times 10^7$ N/m 范围内,静态阻尼一般在 1.5×10^5 Ns/m 内^[4]。在此范围内,侧向缓冲垫和底部橡胶垫板结构参数的变化情况如表 3 所示^[8]。文献[8]发现侧向缓冲垫中纵向、垂向参数以及底部橡胶垫板中纵向、横向参数对波磨病害几乎没有影响。

表 3 减振结构参数随其倍数变化值

Tab. 3 Variation values of vibration reduction structure parameters according to magnification

倍数	底部橡胶垫板垂向刚度/	侧向缓冲垫横向刚度/	底部橡胶垫板垂向阻尼/	侧向缓冲垫横向阻尼/
	(N/m)	(N/m)	(Ns/m)	(Ns/m)
0.5	1×10^7	1×10^7	3.50×10^4	3.50×10^4
1.0	2×10^7	2×10^7	7.00×10^4	7.00×10^4
1.5	3×10^7	3×10^7	1.05×10^5	1.05×10^5
2.0	4×10^7	4×10^7	1.40×10^5	1.40×10^5

利用复特征值法研究侧向缓冲垫横向刚度与阻尼、底部橡胶垫板垂向刚度与阻尼同时呈倍数变化时对轮轨摩擦自激振动频率的影响,如图 6 所示。由图 6 可知,当侧向缓冲垫和底部橡胶垫板的结构参数同时呈倍数变化时,轮轨系统的摩擦自激振动

频率始终保持在 337 Hz。综上可知,侧向缓冲垫横向刚度与阻尼、底部橡胶垫板垂向刚度与阻尼同时呈倍数变化时,对轮轨系统的摩擦自激振动频率基本没有影响。

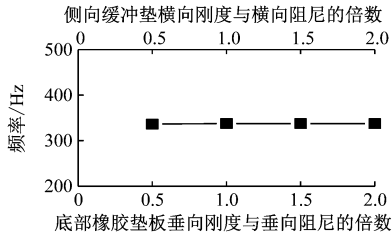


图6 轨道减振结构参数-轮轨摩擦自激振动频率关系曲线
Fig. 6 Relationship curve of track vibration reduction structure parameters and wheel-rail friction self-excited vibration frequency

图7为侧向缓冲垫的横向刚度、横向阻尼呈倍数变化时对轮轨摩擦自激振动发生趋势的影响。由图7 a)可知,随着侧向缓冲垫横向刚度的增加,等效阻尼比变化幅度不大,说明侧向缓冲垫横向刚度对轮轨摩擦自激振动发生趋势影响很小。由图7 b)可知,随着侧向缓冲垫横向阻尼的增加,等效阻尼比基本不变,说明侧向缓冲垫横向阻尼的变化对轮轨摩擦自激振动发生趋势的影响也很小。

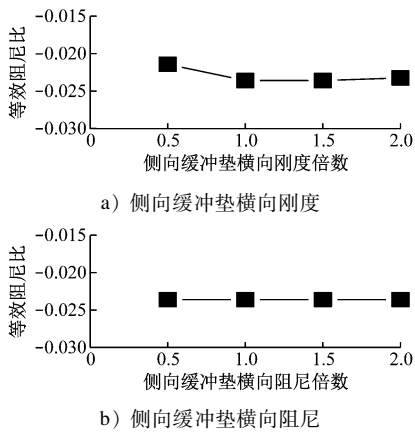


图7 侧向缓冲垫参数-等效阻尼比关系曲线

Fig. 7 Relationship curve of parameters of the lateral cushion and equivalent damping ratio

图8为底部橡胶垫板的垂向刚度、垂向阻尼呈倍数变化时对轮轨摩擦自激振动发生趋势的影响。由图8 a)可见,随着底部橡胶垫板垂向刚度的增加,摩擦自激振动的等效阻尼比呈增大趋势,但增幅极小。由图8 b)可见,随着底部橡胶垫板垂向阻尼的增大,等效阻尼比越大,即轮轨摩擦自激振动的发生趋势就越小。综上所述,轨道减振结构中侧

向缓冲垫参数对轮轨摩擦自激振动的发生趋势影响不大,所以通过增大其横向刚度降低摩擦自激振动发生趋势的意义不大。而底部橡胶垫板中垂向阻尼对摩擦自激振动发生趋势有较大的影响,在一定范围内通过增加底部橡胶垫板的垂向阻尼,有助于降低轮轨摩擦自激振动的发生趋势,当底部橡胶垫板中垂向阻尼接近于 1.5×10^5 Ns/m 时,轮轨系统最不易发生摩擦自激振动。

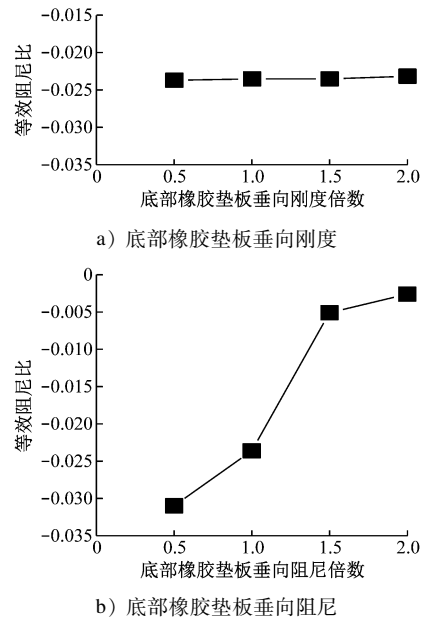


图8 底部橡胶垫板参数-等效阻尼比关系曲线

Fig. 8 Relationship curve of parameters of the bottom rubber pad and equivalent damping ratio

2.2 总的扣件参数对轮轨摩擦自激振动的影响

文献[11-12]验证了轨道支承结构中扣件参数对波磨病害的影响较为明显。本文采用参数化分析讨论总的扣件参数呈倍数变化时对轮轨摩擦自激振动发生趋势的影响。

现阶段,国内城市轨道交通结构使用的扣件静态刚度一般在 $5 \sim 60$ MN/m,静态阻尼一般小于 1.5×10^5 Ns/m^[3]。在此范围内,扣件参数的变化如表4所示^[11]。采用复特征值法研究不同扣件参数对梯形轨枕轮轨摩擦自激振动发生趋势的影响,如图9~10所示。

由图9可见,随着总的扣件刚度的增大,即扣件的垂向、横向、纵向刚度均增大时,轮轨系统的负等效阻尼比增大,即发生摩擦自激振动的趋势降低。因此,通过增加总的扣件刚度有助于降低轮轨系统摩擦自激振动的发生趋势,即当总的扣件刚度接近

表4 扣件参数随其倍数变化值

Tab.4 Fastener parameters variation values according to magnification

倍数	扣件垂 向刚度/ (MN/m)	扣件纵 向刚度/ (MN/m)	扣件横 向刚度/ (MN/m)	扣件垂 向阻尼/ (Ns/m)	扣件纵 向阻尼/ (Ns/m)	扣件横 向阻尼/ (Ns/m)
0.5	9.14	4	4	3 180.65	915.11	915.11
1.0	18.28	8	8	6 361.29	1 830.20	1 830.20
1.5	27.42	12	12	9 541.94	2 745.30	2 745.30
2.0	36.56	16	16	12 722.60	3 660.40	3 660.40

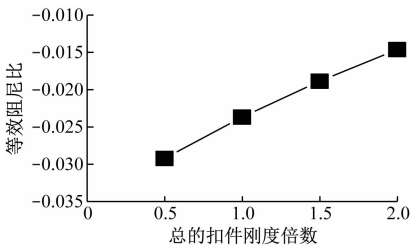


图9 总的扣件刚度-等效阻尼比关系曲线

Fig.9 Relationship curve of overall fastener stiffness and equivalent damping ratio

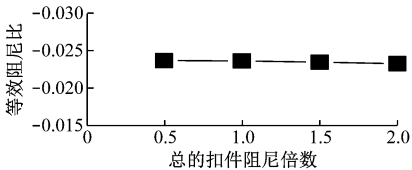


图10 总的扣件阻尼-等效阻尼比关系曲线

Fig.10 Relationship curve of overall fastener damping and equivalent damping ratio

60 MN/m 时,轮轨系统最不易发生摩擦自激振动。

由图 10 可知,随着总的扣件阻尼(即扣件垂向、横向、纵向阻尼)的增大,轮轨系统总的等效阻尼比基本不变,即轮轨系统发生摩擦自激振动的趋势基本不变。因此,通过调整总的扣件阻尼以降低摩擦自激振动的发生趋势意义不大。基于摩擦自激振动的观点,在一定范围内,通过改变总的扣件刚度对产生自激振动的等效阻尼比影响较大,而总的扣件阻尼变化对等效阻尼比的影响较小。由此可见,通过增加总的扣件刚度有助于缓解轮轨系统摩擦自激振动的发生趋势。

3 结论

1) 在梯形轨枕支承小半径曲线轨道上,使轮轨系统发生摩擦自激振动的频率为 337 Hz 且主要发生在低轨上,在该频率下可能会诱发波长为 66 mm 的波磨。

2) 在轨道减振结构参数对轮轨摩擦自激振动的影 响研究中,减振结构参数的改变对该区段轮轨摩擦自激振动的诱导频率的影响较小,而减振结构参数对轮轨摩擦自激振动的发生趋势的影响较为明显。在一定范围内通过增加减振结构中底部橡胶垫板的垂向阻尼,可以有效降低摩擦自激振动发生的趋势,从而有助于减缓相应区段的波磨病害。

3) 在一定范围内通过改变扣件参数,发现总的扣件刚度对轮轨系统摩擦自激振动的发生趋势影响较大,而总的扣件阻尼对轮轨摩擦自激振动的发生趋势影响较小。通过增加总的扣件刚度有助于减缓相应区段内的波磨病害。

参考文献

[1] 陆云. 地铁小半径曲线钢轨磨耗的防治措施[J]. 城市轨道交通研究, 2018(1): 68.
LU Yun. Measures against rail wear on subway small radius curve sections[J]. Urban Mass Transit, 2018(1): 68.
[2] 尧辉明, 沈钢, 崔巍. 曲线钢轨波磨打磨方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2019(8): 1162.
YAO Huiming, SHEN Gang, CUI Wei. Grinding method for rail corrugation in curved track [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2019(8): 1162.
[3] 崔晓璐. 地铁线路钢轨波磨现象发生机理研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2017.
CUI Xiaolu. Research on occurrence mechanisms of rail corrugation phenomena in metros [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2017.
[4] 谷爱军, 刘维宁, 张厚贵, 等. 地铁扣件刚度和阻尼对钢轨异常波磨的影响[J]. 都市快轨交通, 2011(3): 17.
GU Aijun, LIU Weining, ZHANG Hongui, et al. Influence of subway fastener stiffness and damping on abnormal rail corrugation[J]. Urban Rapid Rail Transit, 2011(3): 17.
[5] ILIAS H. The influence of railpad stiffness on wheelset/track interaction and corrugation growth[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 227(5): 935.
[6] OYARZABAL O, GOMEZ J, SANTAMARIA J, et al. Dynamic optimization of track components to minimize rail corrugation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(3-5): 904.
[7] HEMPELMANN K, KNOTHE K. An extended linear model for the prediction of short pitch corrugation [J]. Wear, 1996, 191(1-2): 161.
[8] 李霞, 李伟, 申莹莹, 等. 基于轨道振动理论的梯形轨枕轨道钢轨波磨研究[J]. 机械工程学报, 2016(22): 121.
LI Xia, LI Wei, SHEN Yingying, et al. Study on the rail corrugation of the ladder-type sleepers track based on the track vibration theory [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016(22):121.